Sugerencias a los directores:

Los *"Problemas Semanales"* fueron pensados para que durante ese tiempo estén expuestos a la vista de los alumnos en el patio escolar; pasado ese tiempo serán reemplazados por los nuevos. Sería bueno que en ese período los directores averigüen quiénes los resolvieron y los alienten, con el apoyo de sus profesores a encontrar la solución más original o la más corta o la que usa recursos más elementales o ingeniosos. Este es el camino que conduce a la Olimpíada de Matemática y disfrutar de una tarea creativa ampliamente valorada.

¡¡¡Difunda los Problemas!!!

Problemas Semanales

de Patricia Fauring y Flora Gutiérrez

Fecha: 21/10/2024

XLI - 131. Diremos que un conjunto de enteros positivos distintos, que tiene por lo menos dos enteros positivos, es *centenario* si el mayor de los números es 100. El *promedio* de un conjunto centenario es el promedio de sus números. Por ejemplo, el promedio del conjunto $\{1,2,20,100\}$ es $\frac{123}{4}$ y el promedio del conjunto $\{74,90,100\}$ es 88.

Determinar todos los números enteros que se pueden obtener como el promedio de un conjunto centenario.

XLI - 231. Un paralelepípedo recto pintado de azul se corta en cubitos de 1x1. Hallar las posibles dimensiones, si la cantidad de cubitos sin caras azules es igual a un tercio de la cantidad total de cubitos.

ACLARACIÓN: Un paralelepípedo recto es un cuerpo de 6 caras, todas ellas rectángulos (o cuadrados).

XLI - 331. Sea n un entero positivo. Beto escribe en el pizarrón una lista de n enteros no negativos. Luego él realiza una sucesión de movidas (de dos pasos) del siguiente tipo:

Primero, para cada $i=1,2,...,n$, él cuenta cuántos números del pizarrón son menores o iguales que i. Sea a_i el número obtenido para cada $i=1,2,...,n$.

A continuación, borra todos los números del pizarrón y escribe los números $a_1,a_2,...,a_n$.

Por ejemplo, si $n=5$ y los números iniciales del pizarrón son 0, 7, 2, 6, 2, al cabo de la primera movida los números del pizarrón serán 1, 3, 3, 3, 3; después de la segunda movida serán 1, 1, 5, 5, 5, y así siguiendo.

a) Demostrar que, para todo n y para toda configuración inicial, llegará un momento a partir del cual los números ya no se modificaran más al utilizar esta movida.

b) Hallar (en función de n) el mínimo valor de k tal que, para toda configuración inicial, las movidas realizadas a partir de la movida número k no cambiarán los números del pizarrón.