Prueba destacada de la semana: 20/08/2020

PRIMER NIVEL

1. Un número *claro* es un entero positivo de 10 dígitos o menos en el que el primer dígito de la izquierda cuenta cuantos ceros tiene el número, el segundo dígito cuenta cuantos unos tiene el número, el tercero cuenta cuantos dos tiene el número, y así siguiendo. Por ejemplo 42101000 es claro.
Hallar los tres números claros más pequeños y justificar que son los más pequeños.

2. Un polígono regular de 2000 lados tiene sus vértices numerados del 1 al 2000 en el sentido de las agujas del reloj. Un grillo realiza sucesivos saltos entre vértices: Si el número del que sale no es una potencia de 3, salta en el sentido de las agujas del reloj por encima de 4 vértices consecutivos y cae en el quinto (por ejemplo, si está en el vértice 53 salta hasta el vértice 58), y si el número del vértice del que sale es una potencia de 3, salta en contra del sentido del reloj dos vértices y cae en el tercero (por ejemplo, si está en el vértice $27 = 3^2$, retrocede hasta el vértice 24).
Si el grillo inicia su viaje en el vértice con el número 4, decidir si puede, mediante saltos sucesivos, llegar al vértice
a) $v = 1000$
b) $v = 201$.
Si la respuesta es sí, hallar la cantidad de saltos que debe dar el grillo para llegar por primera vez al vértice v y si la respuesta es no, explicar porqué.
NOTA: Las potencias de 3 son $3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, etc.

3. Sea ABC un triángulo equilátero y P un punto interior tal que $P\hat{A}C = 2P\hat{B}A$ y $P\hat{C}B = 3P\hat{B}A$.
Calcular la medida de los ángulos $P\hat{A}B$ y $P\hat{C}B$.

SEGUNDO NIVEL

1. Un conjunto no vacío de números naturales se denomina *pequeño* si la cantidad de elementos es menor que el menor elemento del conjunto.
Consideramos los siguientes conjuntos M: El menor elemento de M es un número entero positivo m menor o igual que 100; el mayor elemento de M es cualquier múltiplo positivo de m menor o igual que 100, digamos km. Los elementos de M son todos los múltiplos positivos de m, desde m hasta km. Es decir, $M=\{m, 2m, 3m, \dots , km\}$, con $km \leq 100$.
Calcular cuántos de los conjuntos M son pequeños.

2. Un tren marcha a velocidad constante. Si se aumentara su velocidad en 10 kilómetros por hora, el tren llegaría a destino 45 minutos antes. Si se disminuyera su velocidad en 10 kilómetros por hora, el tren llegaría 1 hora más tarde. Hallar la cantidad de kilómetros que tiene el recorrido del tren.

3. Sea $ABCD$ un rectángulo de lados AB, BC, CD y DA, con AB mayor que BC; sea E el punto medio de AB y F el punto de la diagonal AC tal que BF es perpendicular a AC. Si además FE es perpendicular a BD, calcular $\frac{AB}{BC}$.

TERCER NIVEL

1. Sea M el entero con 2011 cifras iguales a 8 y N el entero con 2011 cifras iguales a 5. Calcular la suma de las cifras del número $A = 9 \cdot M \cdot N$. (multiplicación de 9 por M por N).

2. En una bolsa hay 100 gatos, algunos blancos, otros negros y los restantes, grises. Se sabe que los negros son más que el doble de los blancos; que tres veces los blancos son más que 4 veces los grises y que 3 veces los grises son más que los negros. Calcular cuántos gatos de cada clase hay en la bolsa.

3. Sea ABC un triángulo con $A\hat{B}C = 120°$ y $BC=2AB$. Denotamos M al punto medio de BC y N al punto medio de AC. Calcular el ángulo entre AM y BN.