Prueba destacada de la semana: 30/07/2020

PRIMER NIVEL

1. Franco tiene un tablero de 115×7, o sea, de 115 filas con 7 casillas cada una. Él debe colocar fichas en las casillas del tablero siguiendo las siguientes reglas:
En cada casilla puede colocar una sola ficha.
No pueden quedar dos filas idénticas, es decir, no puede haber dos filas que tengan las mismas casillas ocupadas y las mismas casillas vacías.
Calcular la máxima cantidad de fichas que puede colocar Franco en su tablero.

2. Al reemplazar n por cada uno de los números naturales desde 1 hasta 2008 en la fórmula $3^n - n^2$ y efectuar las operaciones indicadas se obtienen 2008 números. Los cuatro primeros son 2, 5, 18 y 65 pues $3^1 - 1^2 = 2$, $3^2 - 2^2 = 5$, $3^3 - 3^2 = 18$ y $3^4 - 4^2 = 65$.
Calcular cuántos de los 2008 números obtenidos son múltiplos de 5.

3. Sea ABC un triángulo rectángulo con $A\hat{B}C = 90°$. Se considera el punto D del lado AC tal que $CD = AB$ y el punto E del lado BC tal que $DB = DE$. Si se sabe que $C\hat{A}B = 2A\hat{B}D$, calcular la medida del ángulo $E\hat{D}C$.

SEGUNDO NIVEL

1. En cada casilla de un tablero de 3×4 se escribe uno de los números 1, 2, 3, 4 de modo que en cada fila los cuatro números de esa fila sean distintos, y en cada columna los tres números de esa columna sean distintos. Calcular cuántos tableros diferentes se pueden obtener.

2. Inicialmente hay un número entero positivo escrito en el pizarrón. Alex debe escribir una sucesión de enteros positivos usando en cada paso una de las siguientes operaciones, a su elección:
Si el último número escrito es n, Alex puede escribir el número $3 \cdot n + 13$.
Si el último número escrito es n, y n es un cuadrado perfecto, Alex puede escribir el número $\sqrt{n}$.
a) Si el número inicial es 81, decidir si Alex puede elegir las sucesivas operaciones para obtener en algún momento el número 55.
b) Si el número inicial es 55, decidir si Alex puede elegir las sucesivas operaciones para obtener en algún momento el número 81.
ACLARACIÓN: Se llama cuadrado perfecto al cuadrado de un número entero.

3. Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Sea D en BC tal que AD es perpendicular a BC. La bisectriz del ángulo $A\hat{C}B$ corta al lado AB en M y la bisectriz del ángulo $B\hat{A}D$ corta a BC en N. Si $AC = 10$ y $BC = 30$, calcular el perímetro del cuadrilátero $AMND$.

TERCER NIVEL

1. Sean a y b enteros positivos tales que

$$\frac{a}{a-2} = \frac{b+15}{b+5}$$

Determinar el mayor valor posible de $\frac{a}{b}$.

2. Dado un entero positivo n llamaremos *cadena de divisores de n* a una sucesión de números naturales distintos que empieza en 1, termina en n y donde cada número de la cadena, a partir del segundo, es un múltiplo de su antecesor. Por ejemplo, si $n = 20$ dos cadenas de divisores de n son 1, 5, 10, 20 y 1, 4, 20.
Calcular la cantidad de cadenas de divisores de $n = 2310$.

3. Sea ABC un triángulo rectángulo con $\hat{C} = 90°$ y $AC=2BC$. Se traza la paralela al lado AC que corta a AB y BC en M y N respectivamente, de modo que $CN=2BN$. Sea O el punto de intersección de los segmentos CM y AN. Calcular la medida del ángulo $O\hat{B}C$.