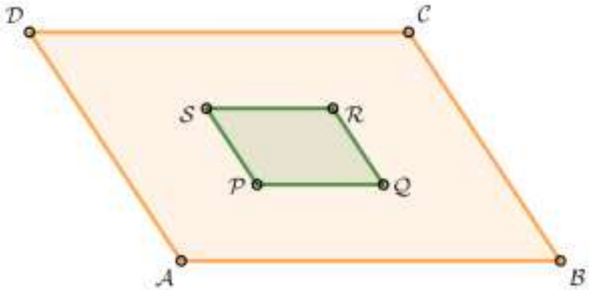
Torneo Geometría e Imaginación

Problema Semanal de entrenamiento P8 – T4 – 2025

En el paralelogramo $ABCD$ se toman los respectivos baricentros P, Q, R y S de los triángulos ABC, BCD, CDA y DAB. Mostrar que $PQRS$ es un paralelogramo que se puede obtener mediante una homotecia de razón $\frac{1}{3}$ aplicada a $ABCD$.

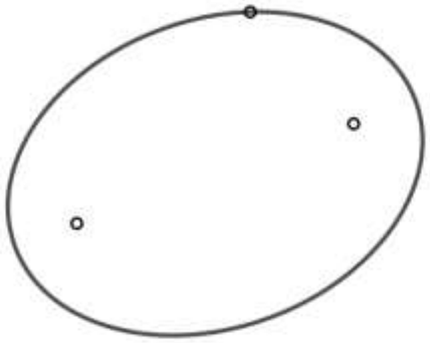


Solución P7 – T4 – 2025

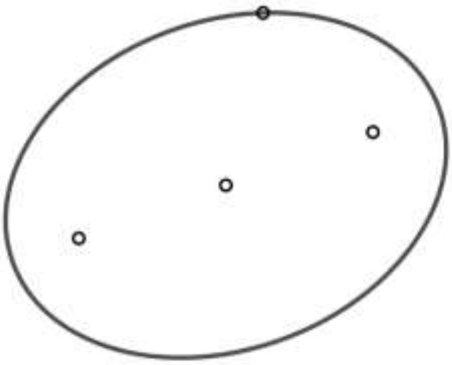
Usando GeoGebra dibujar una elipse con su centro, luego, también con GeoGebra, inscribir un cuadrado en la elipse.

Solución:

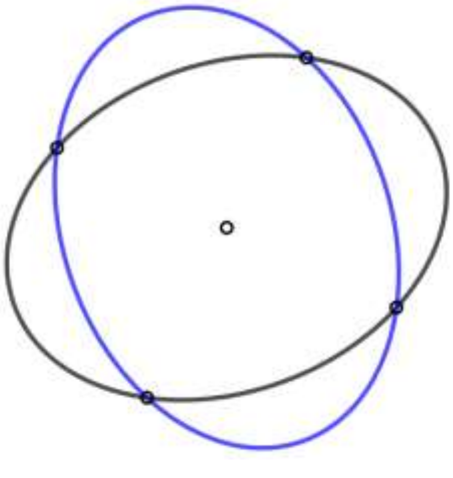
Seleccionando el recurso **Elipse** marcamos tres puntos, los dos primeros serán los focos y el tercero un punto de la elipse.



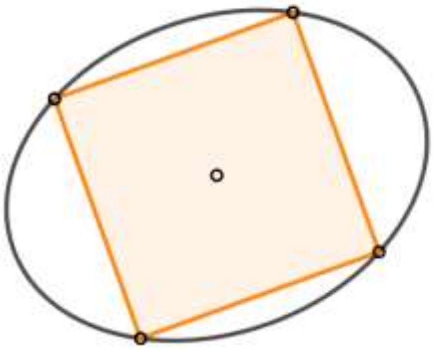
Hallamos el centro de la elipse, seleccionando el recurso **Medio o Centro** y luego marcando los focos de la elipse.



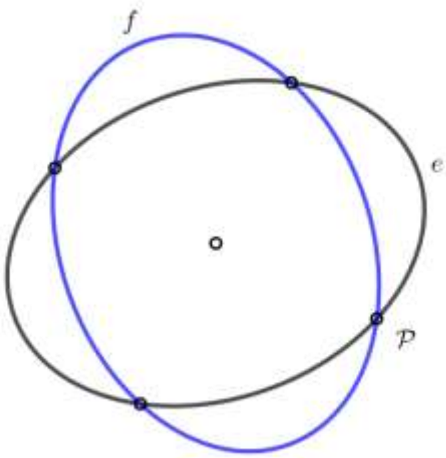
Ocultamos los focos y el punto de la elipse marcando cada uno de estos puntos con el botón derecho y luego en **Objeto visible**. Usando **Rotación**, rotamos la elipse *90°* en cualquier sentido. Ahora con **Intersección** marcamos una elipse luego la otra y así obtenemos cuatro puntos en la intersección de ambas elipses.



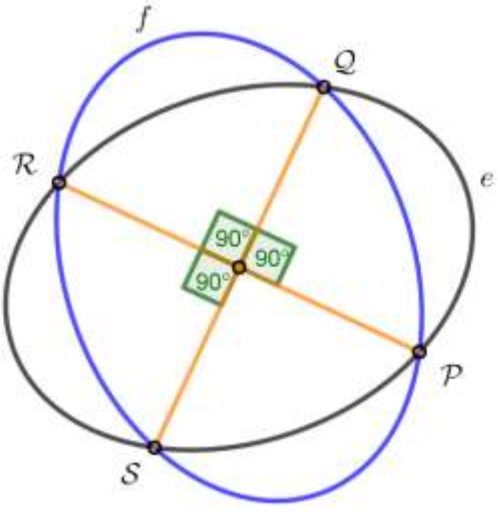
Estos puntos así obtenidos son los vértices de un cuadrado.



Para justificar la afirmación precedente, es conveniente observar que si se rota *90°*, alrededor del centro, una de las dos elipses anteriormente dadas, se obtiene la otra elipse. Notemos con *e* y *f* las elipses y un punto *P* en la intersección de ambas elipses como muestra la siguiente figura.



Al rotar *P 90°* alrededor del centro, se obtendrá un punto de *f* dado que *P* está en *e*, pero como *P* también está en *f*, se obtendrá un punto de *e*, es decir, se obtendrá un punto en la intersección de *e* con *f*. En consecuencia, si rotamos *P 90°* en sentido antihorario alrededor del centro, obtenemos *Q*, si hacemos lo mismo con *Q* obtendremos *R* y haciendo lo mismo con *R* obtendremos *S*.



De este modo se forma el cuadrado *PQRS*.

Nota: Una elipse es el lugar geométrico del plano dado por los puntos tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es un valor dado. El centro de una elipse es el punto medio de sus focos y simetría central respecto del centro transforma a la elipse en sí misma, es decir, la elipse es simétrica respecto de su centro.