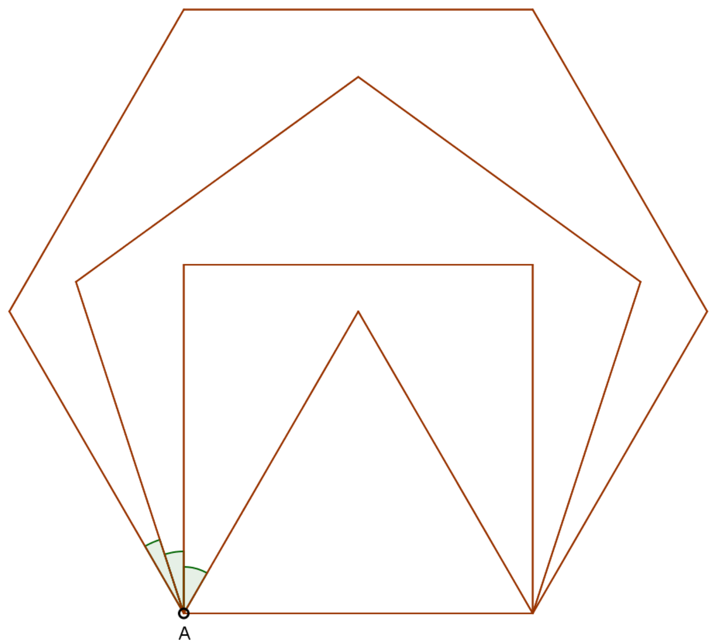
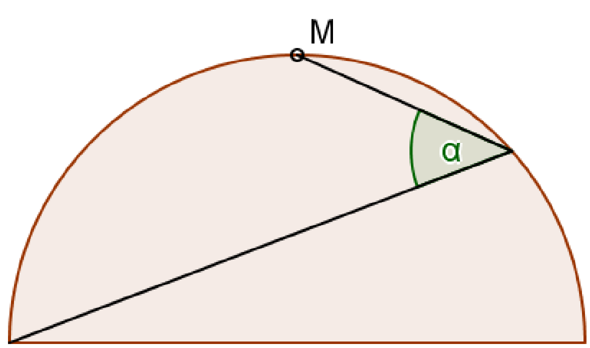
SOLUCIONES PRIMER NIVEL

1. Los cuatro polígonos de la figura son regulares. Halla los valores de los tres ángulos, de vértice A limitados por dos lados de los polígonos dados, indicados en la figura.

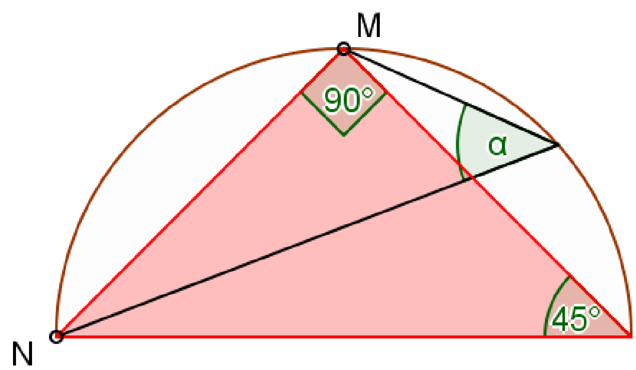


Solución: Los valores de los ángulos interiores de los polígonos regulares son: 60º (triángulo), 90º (cuadrado), 108º (pentágono), 120º (hexágono). Los valores pedidos son obtenidos por diferencias: 90º- 60º = 30º, 108º - 90º = 18º, 120º - 108º = 12º.

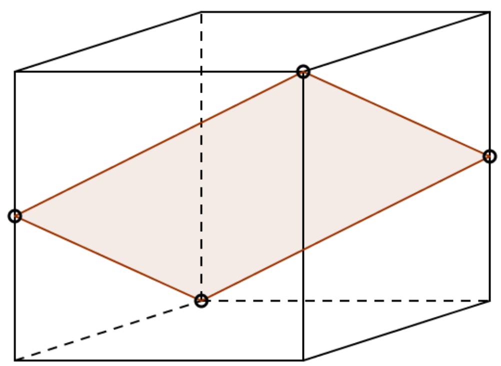
2. En el semicírculo de la figura, M es el punto medio de la semicircunferencia. Halla el valor del ángulo α.



Solución: El triángulo de la figura es rectángulo e isósceles, es decir, dos de sus ángulos miden 45º. La cuerda MN que subtiende el ángulo de 45º, también subtiende el ángulo α, luego α = 45°.



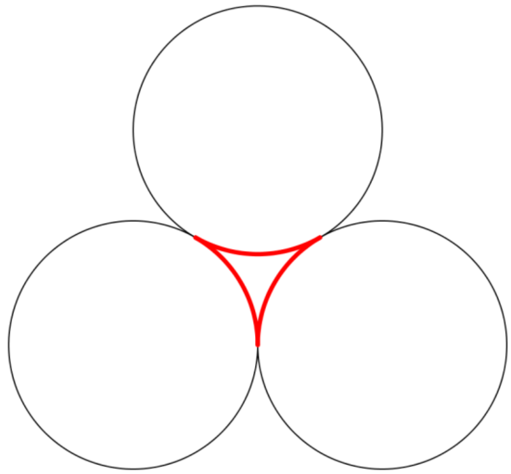
3. ¿Qué clase de cuadrilátero es el de la figura, cuyos vértices son dos vértices del cubo y dos puntos medios de aristas del cubo?



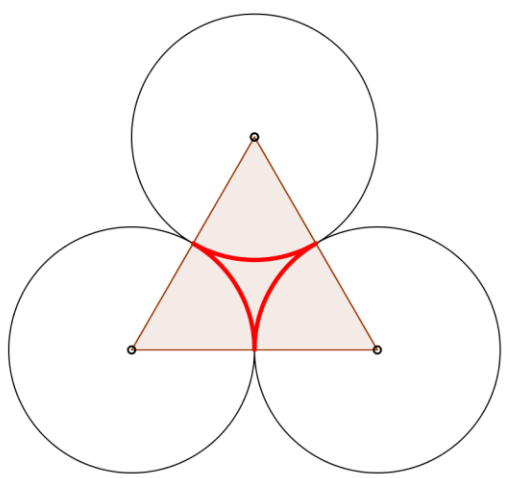
Solución: Cada lado del cuadrilátero une un vértice de una cara con el punto medio de un lado no contiguo de la misma cara, es decir, los cuatro lados son de igual medida. La figura es un rombo.

SOLUCIONES SEGUNDO NIVEL

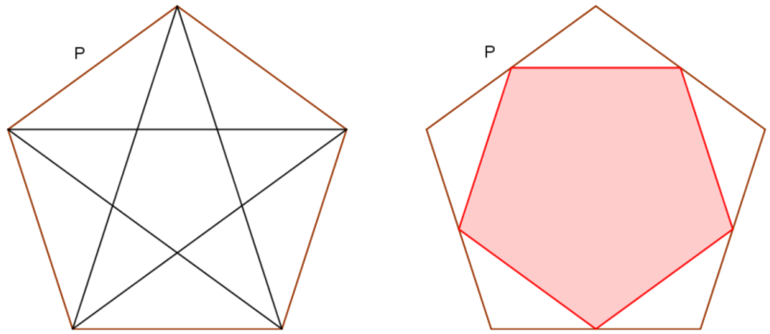
1. Halla el perímetro de la figura limitada por tres circunferencias, todas ellas de 4cm de longitud y tangentes dos a dos.



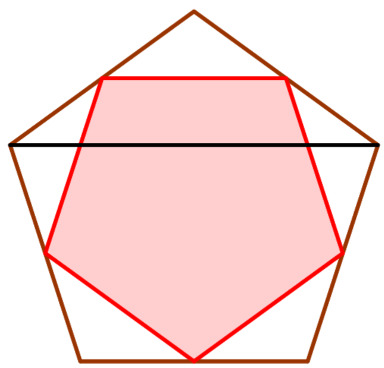
Solución: Los centros de las circunferencias son los vértices de un triángulo equilátero (cada lado mide dos radios de circunferencia) cuyos lados limitan los arcos de circunferencias que conforman el contorno de la figura. Cada arco se corresponde con un ángulo de 60°, luego el perímetro de la figura equivale a la longitud de tres de tales arcos que es la longitud de un arco que se corresponde con 180°. Luego, el perímetro es 2cm.



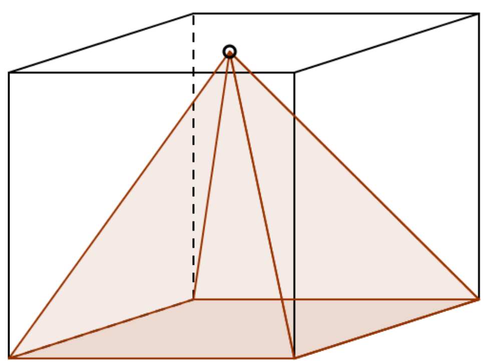
2. Las diagonales del pentágono regular P, indicadas en la figura, suman una longitud de 20cm. Halla el perímetro del pentágono cuyos vértices son los puntos medios de los lados de P.



Solución: Cada lado del pentágono de puntos medios es base media de un triángulo que tiene por base a una diagonal de P, luego mide 2cm. El perímetro buscado es 10cm.



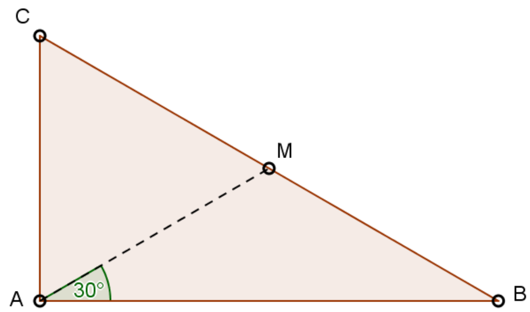
3. Halla el volumen de la pirámide cuya base coincide con la cara inferior del cubo de aristas de 1cm y que tiene un vértice en la cara superior del cubo.



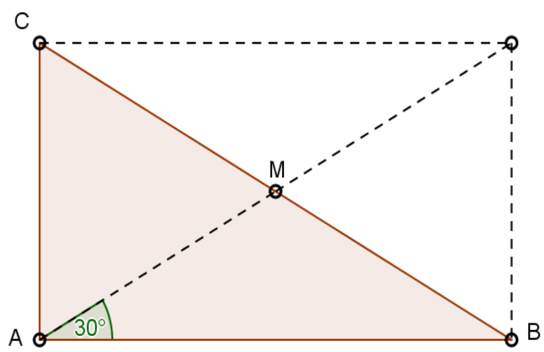
Solución: Cualquier punto en la cara superior está a altura 1cm de la cara de la base. La base de la pirámide es de $1cm^2$; luego el volumen es $1/3$ cm^3.

SOLUCIONES TERCER NIVEL

1. En el triángulo rectángulo ABC, recto en A, M es el punto medio de la hipotenusa. El ángulo BAM es 30º. Halla los ángulos del triángulo.

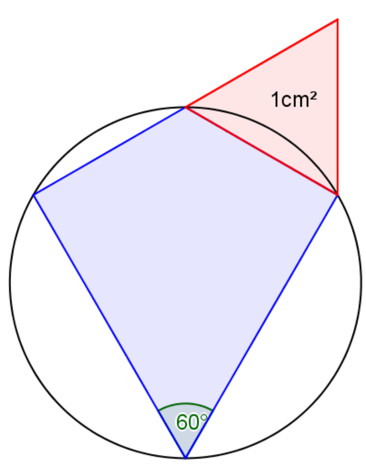


Solución: Dado que las diagonales de un rectángulo son iguales y se cortan en sus puntos medios,

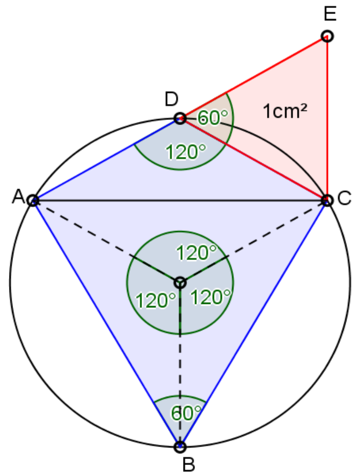


AM = MB = MC. Luego los triángulos ABM y AMC son isósceles y los ángulos del triángulo ABC resultan A = 90 º, B = 30º y C = 60º.

2. Un triángulo equilátero de $1cm^2$ de área comparte uno de sus lados con un romboide inscripto en una circunferencia y que tiene un ángulo de 60^0, tal como muestra la figura. Halla el área del romboide.

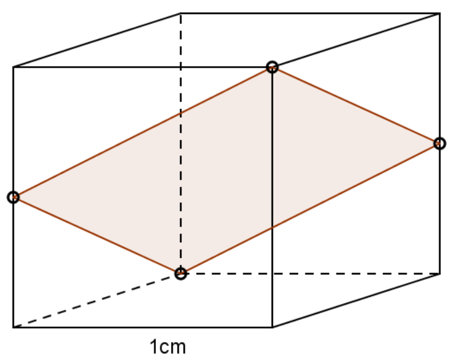


Solución: El triángulo ABC es equilátero, por ser isósceles y tener un ángulo de 60°.

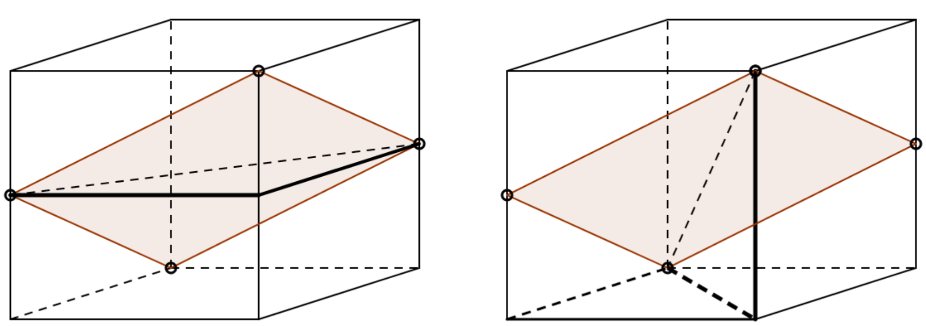


Usando el centro de la circunferencia, podemos descomponer ABC en tres triángulos iguales a ACD. Los puntos A, D y E están alineados y AD = DC = DE. Los triángulos ACD y DCE tienen la misma área, por ser AD = DE y compartir la altura. El área del romboide resulta igual 4cm².

3. Los vértices del cuadrilátero, dado en la figura, son dos vértices del cubo y dos puntos medios de aristas del cubo. Halla el área del cuadrilátero, sabiendo que las aristas del cubo miden 1cm.

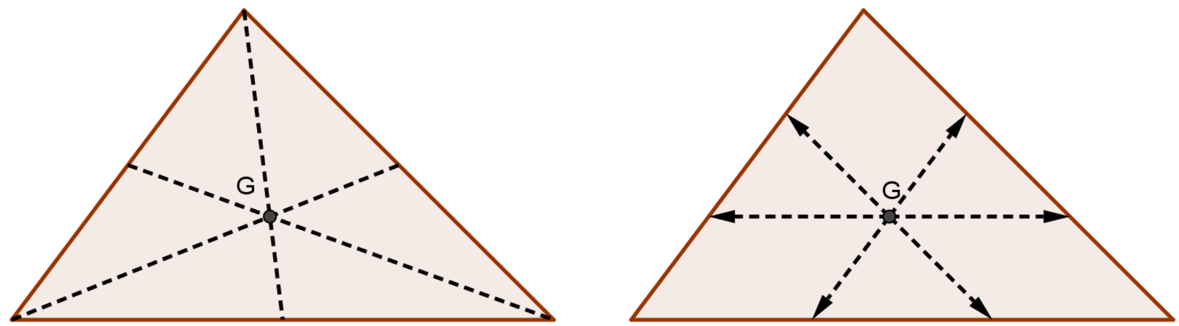


Solución: Cada lado del cuadrilátero une un vértice de una cara con el punto medio de un lado no contiguo de la misma cara, es decir, los cuatro lados son de igual medida. La figura es un rombo. Las diagonales miden $\sqrt{1^2+1^2}cm=\sqrt{2}cm$ y $\sqrt{\sqrt{2}^2+1^2}cm=\sqrt{3}cm$, de modo que el área es $\frac{1}{2}\sqrt{2}\times\sqrt{3}\,cm^2=\frac{\sqrt{6}}{2}cm^2$.

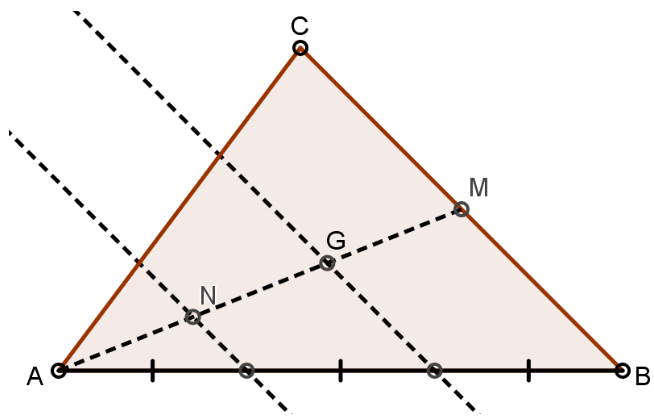


SOLUCIONES CUARTO NIVEL

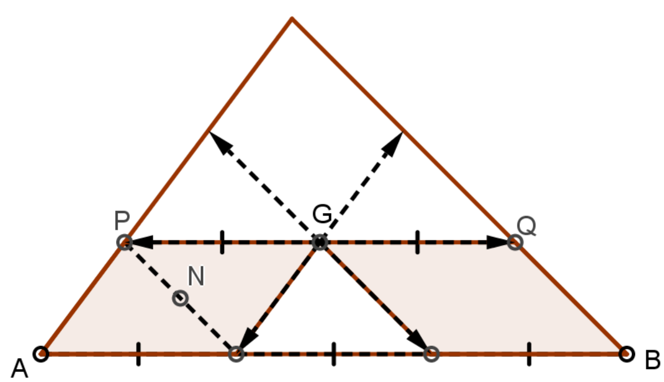
1. Desde el baricentro G de un triángulo de perímetro 6m, parten 6 tortugas en direcciones paralelas a los lados del triángulo hasta llegar a uno de los lados del triángulo. ¿Cuánto es la suma de las distancias recorridas?



Solución: Dado que el baricentro divide a la mediana AM en la relación 2:1, si N es el punto medio de AG, las paralelas a BC que pasan por N y G dividen a AB en tres segmentos de la misma longitud.

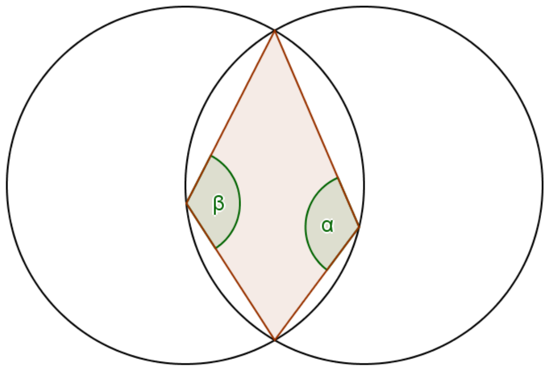


Teniendo en cuenta los paralelogramos sombreados en la figura:

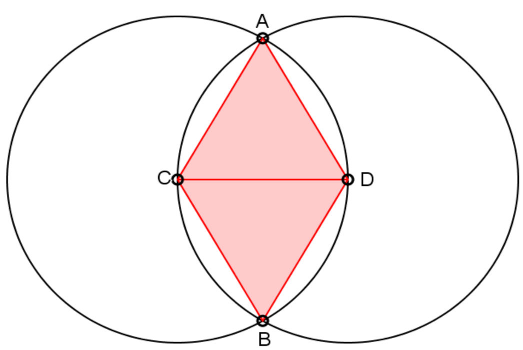


Se concluye que $PQ = \frac{2}{3}AB$. Lo mismo ocurre en los otros dos tramos del recorrido, cada uno es 2/3 del lado paralelo correspondiente. En consecuencia, el recorrido total es de 4m.

2. Las dos circunferencias son de igual radio y cada una pasa por el centro de la otra. Halla los valores de los ángulos α y β indicados en la figura.

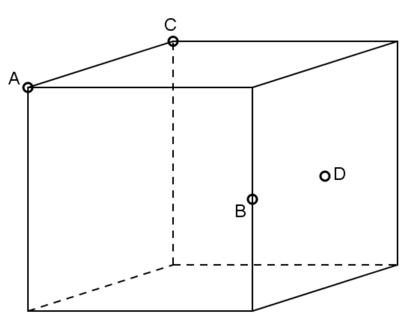


Solución: Si A y B son los puntos de intersección de las circunferencias, los ángulos buscados son iguales por estar subtendidos por la cuerda AB compartida por ambas circunferencias de igual radio. Los arcos ACB y ADB son arcos capaces de la cuerda AB asociados a un mismo ángulo. Si C y D son los centros de las circunferencias,

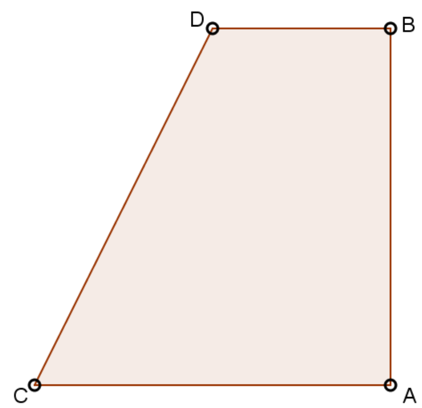


para calcular el valor de α y β, consideramos los triángulos equiláteros ACD y CBD. Se tiene que el valor de α es la medida de BDA y el de β la de BCA, ambos miden 120°.

3. En la figura, A y C son vértices del cubo, B es el punto medio de la arista y D centro de la cara. Decide si la recta que pasa por A y B se corta con la recta que pasa por C y D.



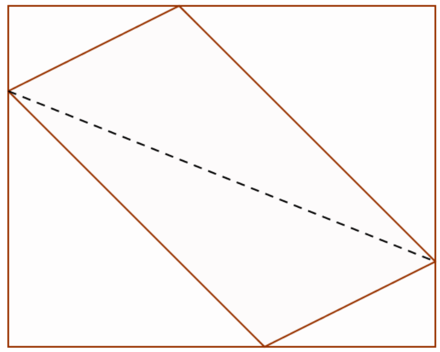
Solución: Como la arista AC es perpendicular a la cara del cubo que contiene el segmento AB, el ángulo CAB es recto. Los segmentos AC y BD son paralelos, en consecuencia, los puntos A, B, C y D son coplanares y son los vértices de un trapecio como se muestra en la figura:



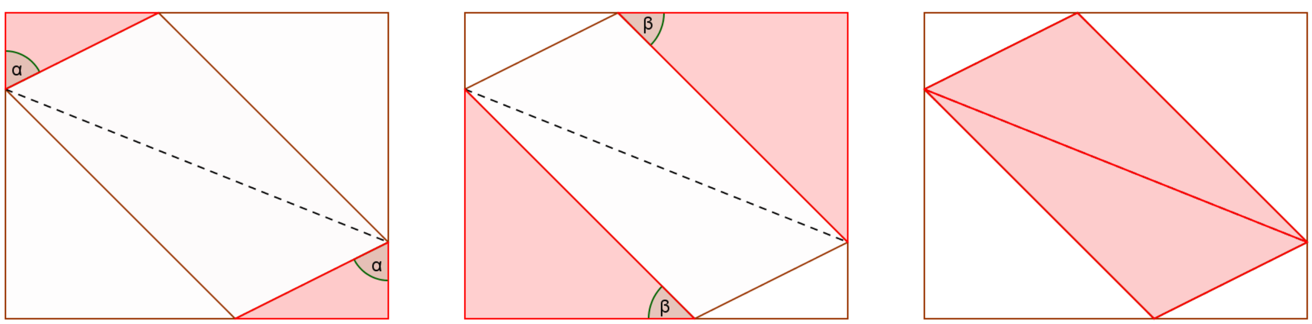
Se concluye que las rectas AB y CD se cortan.

SOLUCIONES QUINTO NIVEL

1. En el rectángulo de $8cm^2$ de área está inscripto un paralelogramo. Halla las áreas de cada una de las dos figuras en las que una diagonal del paralelogramo descompone al rectángulo.

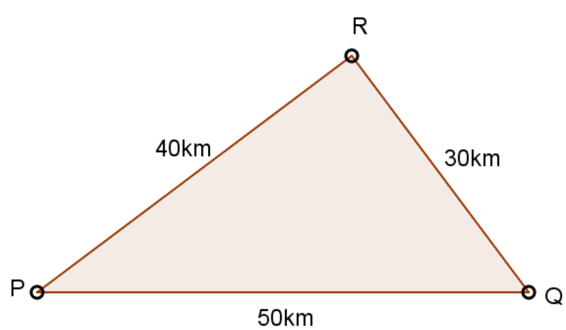


Solución: Cada figura se descompone en tres triángulos que pueden ponerse en correspondencia de a pares, por ser iguales, como se indica a continuación.



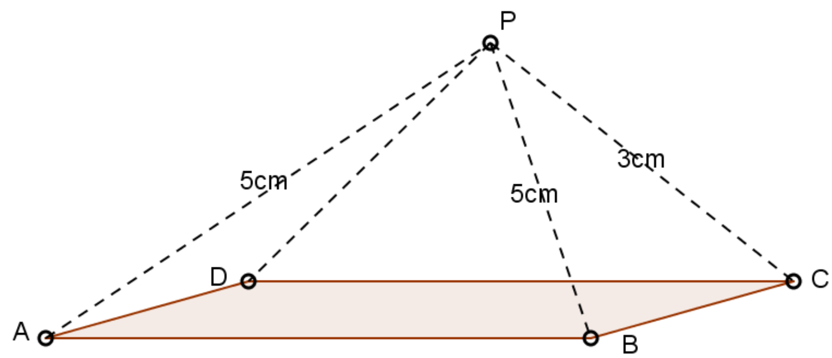
Ambas figuras tienen igual área: $4cm^2$.

2. Una emisora de radio en la ciudad R tiene un alcance de 23km. Un automovilista viaja en línea recta desde la ciudad P a la ciudad Q. ¿Podrá escuchar la radio en algún momento del viaje?



Solución: El triángulo QRP es semejante al triángulo rectángulo de lados 3, 4, 5, luego es rectángulo en R. Su área es $\frac{30\times 40}{2}km^2$ igual a $\frac{50\times h}{2}km^2$ donde h es la altura correspondiente a PQ. Se tiene $h=\frac{30\times 40}{50}km=24km$; es la menor distancia de R a la recta PQ. No puede escuchar la radio.

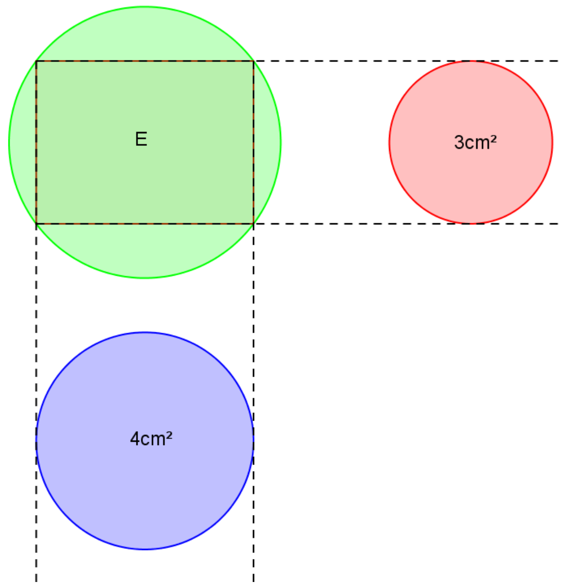
3. En la pirámide de base rectangular ABCD, las aristas PA y PB miden 5cm, la arista PC mide 3cm. Halla la longitud de la arista PD.



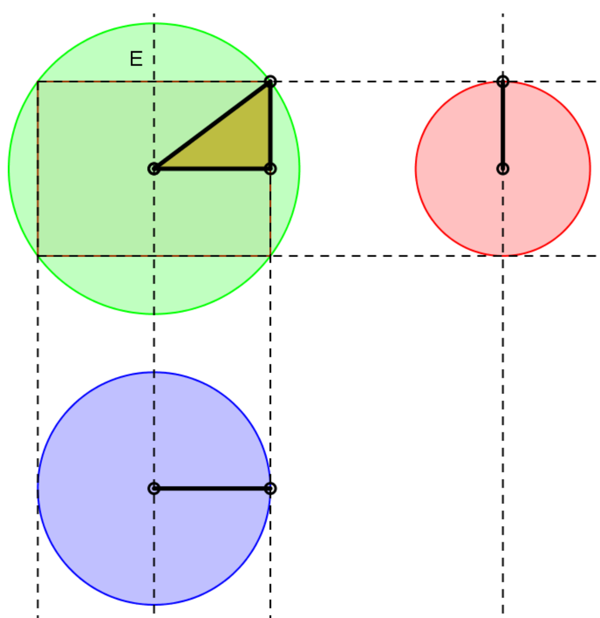
Solución: Por ser PA = PB, P está en el plano bisector del segmento AB, y como ABCD es un rectángulo, también es el plano bisector de CD, luego PD mide 3cm.

SOLUCIONES SEXTO NIVEL

1. En las prolongaciones de los lados del rectángulo inscripto en la circunferencia E, están inscriptos dos círculos, uno de $3cm^2$ de área y otro de $4cm^2$ de área. Halla el área del círculo limitado por E.

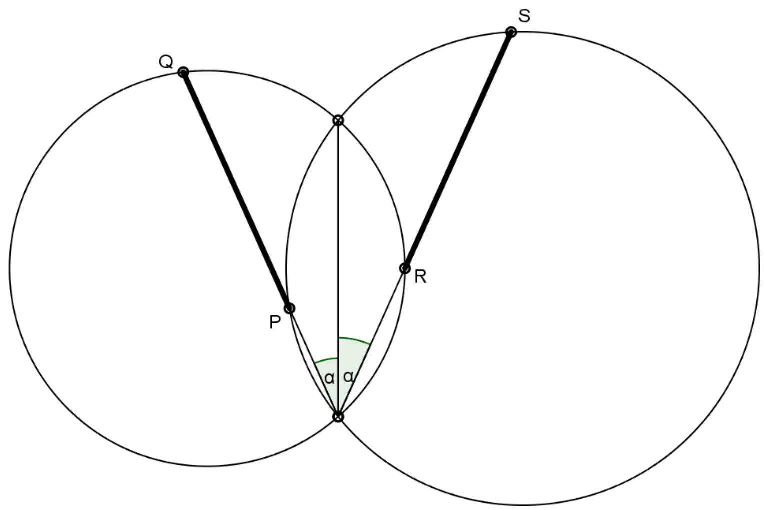


Solución: Con un radio de cada circunferencia se puede formar un triángulo rectángulo que tiene por hipotenusa al radio r de E y por catetos los radios s y t de los otros dos círculos, según indica la figura.

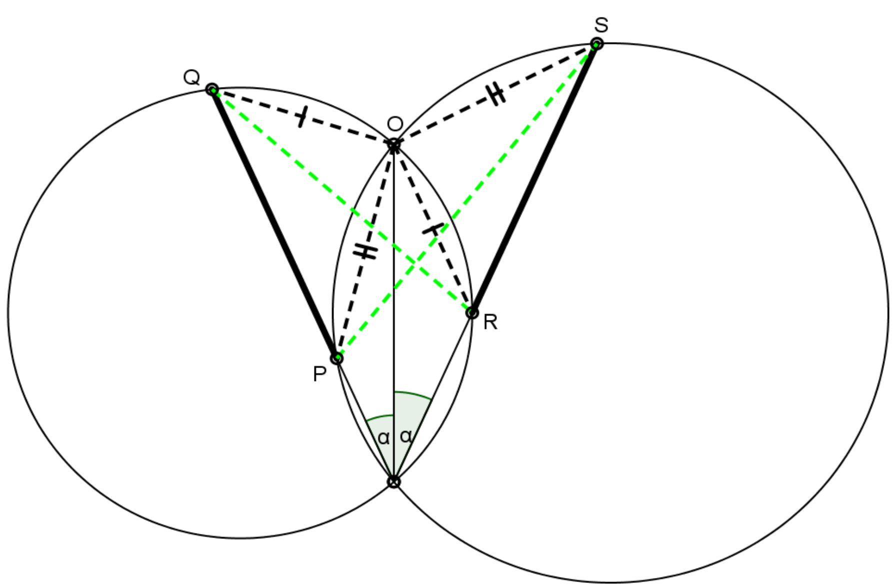


Por el Teorema de Pitágoras es $r^2 = s^2 + t^2$ y multiplicando por π ambos miembros resulta que el área buscada es la suma de las áreas de los dos círculos, es decir $7cm^2$.

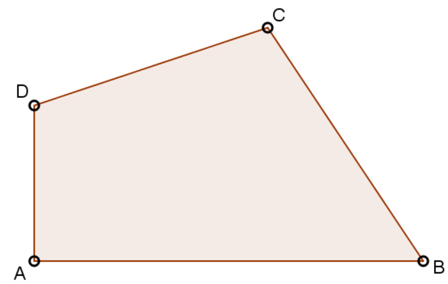
2. Con los datos de la figura, muestra que PQ = RS.



Solución: En la figura siguiente, se tiene OQ = OR y OP = OS, en ambos casos por ser cuerdas que subtienden un mismo ángulo α en una circunferencia. La cuerda QR subtiende los ángulos 2α y QOR en cada uno de los arcos determinados por Q y R, luego el ángulo QOR = π-2α. Análogamente, POS = π-2α. Los ángulos QOP y ROS resultan iguales, de modo que los triángulos QOP y ROS son iguales y en consecuencia PQ = RS.

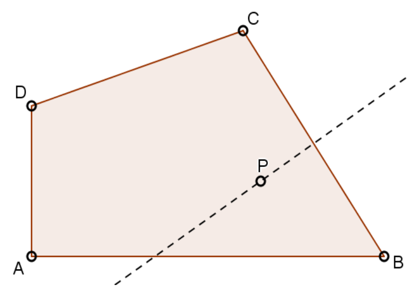


3. La pirámide ABCDE tiene por base el cuadrilátero ABCD dado en la figura, además EA = ED y EB = EC.



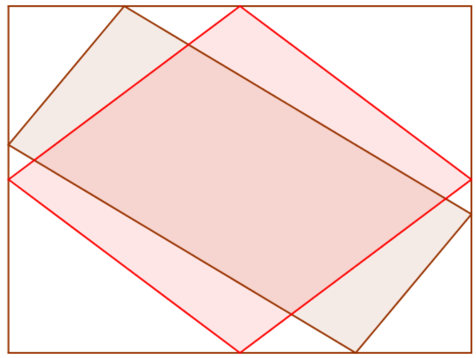
Ubica en la figura el pie de la altura de E sobre el plano que contiene a ABCD.

Solución: E está en los planos bisectores de los segmentos AD y BC, es decir E está en la recta perpendicular al plano que contiene a ABCD. Los planos bisectores cortan al plano de ABCD en las mediatrices de AD y BC respectivamente, luego, el pie de la perpendicular de E es el punto P, intersección de dichas mediatrices.

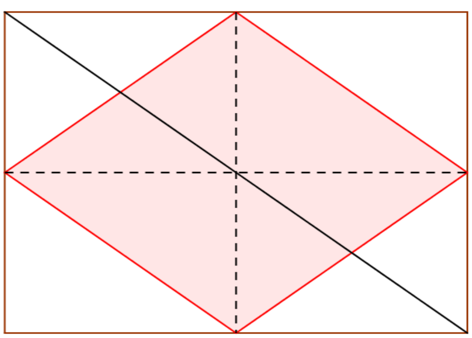


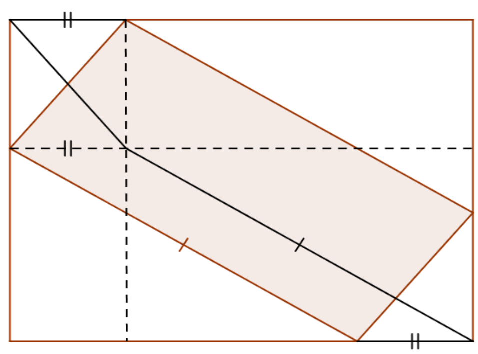
SOLUCIONES SÉPTIMO NIVEL

1. En el rectángulo de la figura está inscripto un paralelogramo. Muestra que el perímetro del paralelogramo es mayor o igual que el perímetro del rombo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del rectángulo.

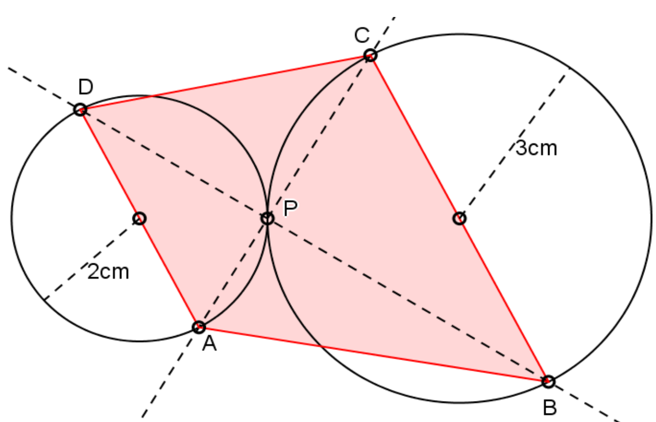


Solución: Dado que las diagonales de un rectángulo son iguales, de las figuras se deduce que dos lados del rombo equivalen a una diagonal, mientras que dos lados del paralelogramo superan o a lo sumo igualan a una diagonal.

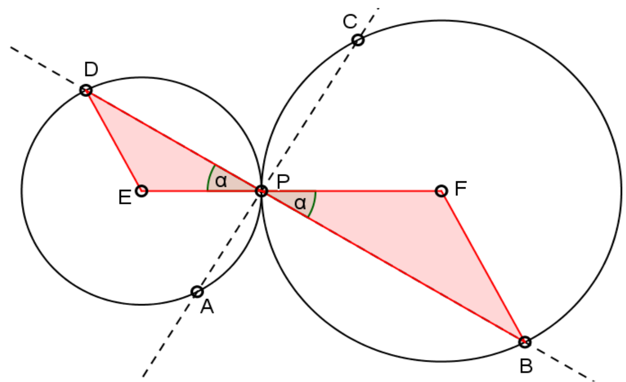




2. Las circunferencias, cuyos radios miden 2cm y 3cm, son tangentes en el punto P. Se trazan dos rectas perpendiculares que pasan por P y cortan a las circunferencias en cuatro puntos A, B, C y D que serán los vértices de un cuadrilátero, tal como ilustra la figura. Muestra que el área de ABCD es a lo sumo $25cm^2$.



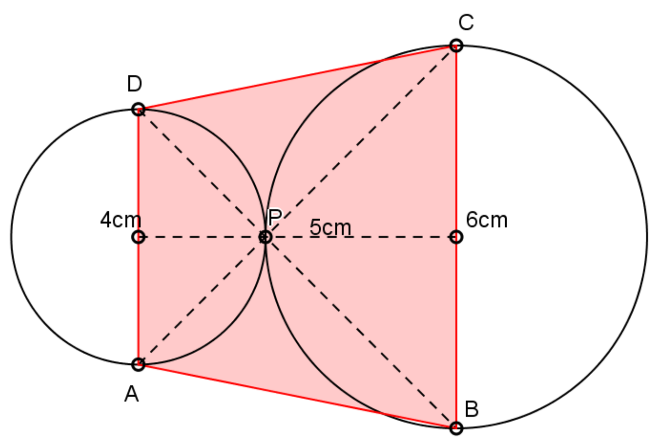
Solución: Como los ángulos en P son rectos, las cuerdas AD y CB son diámetros de las respectivas circunferencias donde se encuentran. Al ser las circunferencias tangentes en P, sus respectivos centros E y F



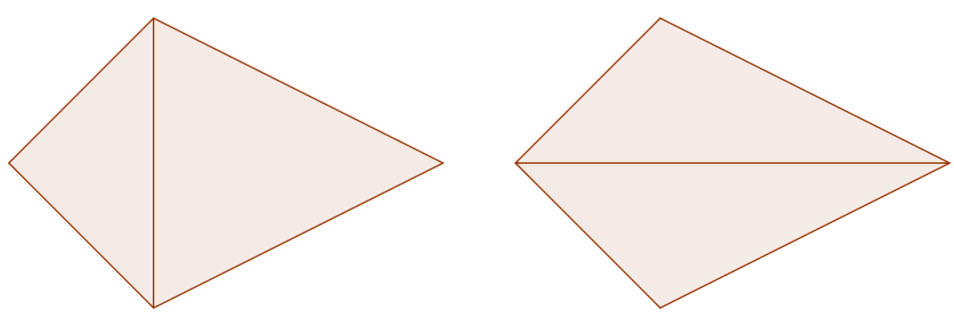
están alineados con P.

Los triángulos EPD y FPB son semejantes, por ser ambos isósceles y tener un mismo ángulo en P. Resulta que el ángulo en E y en F son iguales, es decir, DE es paralelo a FB.

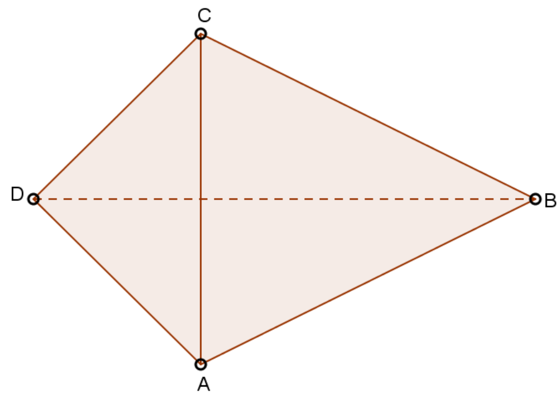
Se concluye que ABCD es un trapecio con bases BC y AD y su altura h es de a los sumo 5cm, dado que es menor o igual a la distancia entre los centros de las circunferencias (pues hay uno en cada base). En consecuencia, el área buscada es $((6+4)\times h/2)\text{cm}^2 = 5h\text{cm}^2$, esto es menor o igual 25cm².



3. El desarrollo de dos caras de un tetraedro es un romboide. Muestra que en el tetraedro hay dos aristas que son perpendiculares.

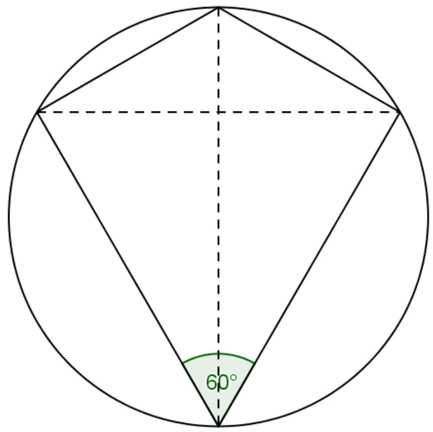


Solución: Como AB = BC y AD = DC, los vértices D y B estarán en el plano bisector de CA, en consecuencia, las aristas AC y BD son perpendiculares. (AC es perpendicular a cualquier recta contenida en su plano bisector)

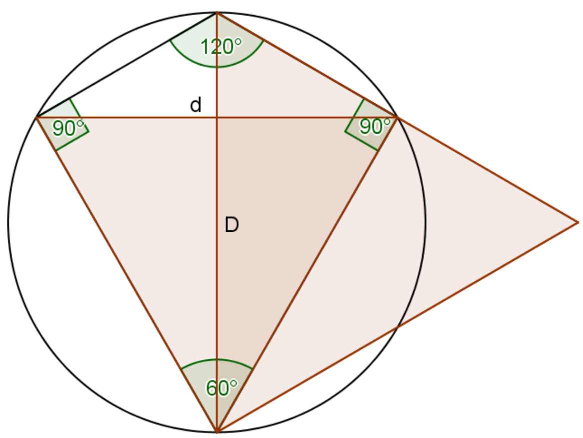


SOLUCIONES OCTAVO NIVEL

1. El romboide inscripto en la circunferencia tiene un ángulo de 60° y las longitudes de sus diagonales suman 10cm. Halla el perímetro del romboide.



Solución: Por ser un romboide inscripto en una circunferencia, sus ángulos son 60°,120°,90°,90°. Si construimos



triángulos equiláteros sobre cada diagonal del romboide como indica la figura,

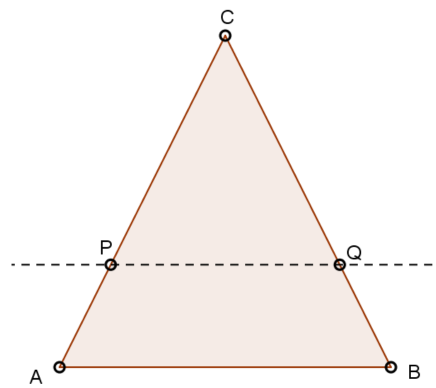
observamos que la diagonal mayor D es igual a la suma de los dos lados menores del romboide y la diagonal menor d es igual al lado mayor del romboide, de modo que el perímetro del rombo es D + 2d.

Por otra parte, d es igual a la altura del triángulo equilátero que tiene por lado a D, resulta $d=\frac{\sqrt{3}}{2}D$. Las diagonales del romboide suman 10cm de longitud, entonces:

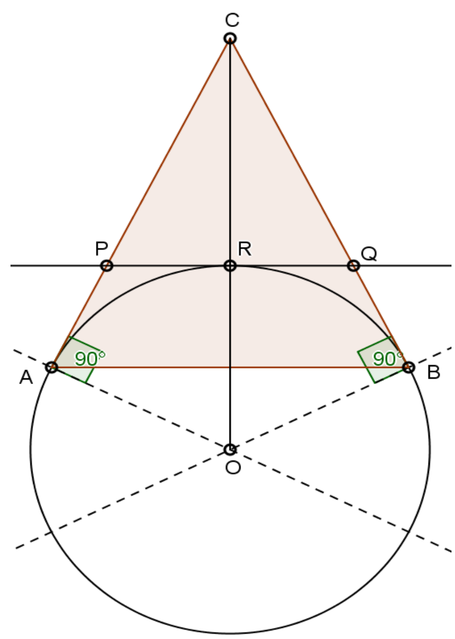
$$D=\frac{10}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{20}{2+\sqrt{3}}$$

El perímetro buscado es $D+\sqrt{3}D=(1+\sqrt{3})D$ es decir $20(\sqrt{3}-1)$.

2. Indica como trazar una recta paralela a la base AB del triángulo isósceles ABC que corte a los lados AC y BC en los puntos P y Q respectivamente y tal que PQ = AP + QB.



Solución: Por A y B trazamos perpendiculares a AC y BC respectivamente las que determinan el centro O de la

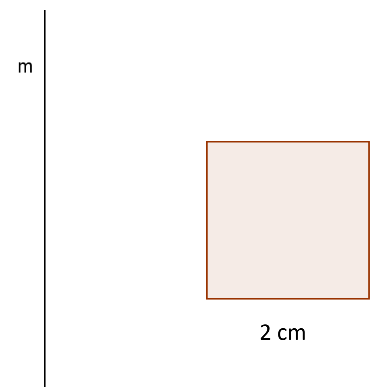


circunferencia que tiene las tangentes CA y CB.

Por el punto R, intersección de CO con la circunferencia, trazamos la tangente a la circunferencia que corta a CA y CB en los puntos P y Q respectivamente. Resulta PQ paralelo a AB (por ser ambos perpendiculares a CO),

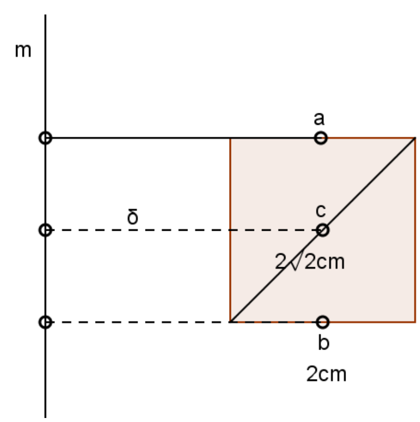
AP = PR y BQ = QR, o sea PQ = AP + QB.

3. En la figura, la recta m es paralela a un lado del cuadrado de 2cm de longitud. Dos lados del cuadrado giran alrededor de la recta m generando superficies de $20cm^2$ cada una. ¿Cuál el área de la superficie que se genera al girar una diagonal del cuadrado?



Solución: Según el Teorema del centroide de Pappus (ver Problema 17 de la Notas de Geometría 5), el área de la superficie generada por un segmento que gira alrededor de una recta, ambos en un mismo plano, es igual a la longitud del segmento por la longitud de la circunferencia que describe el punto medio del segmento durante el giro. En la situación del problema, los dos lados del cuadrado que son perpendiculares a m son el único par de lados que generan superficies de igual área.

Si δ es la distancia entre la recta y el centro del cuadrado, se tiene $2\times2\pi\delta = 20$, es decir $2\pi\delta = 10$.



El área de la superficie generada por una diagonal es $(2\sqrt{2}\times2\pi\delta)cm^2 = 20\sqrt{2}\ cm^2$.