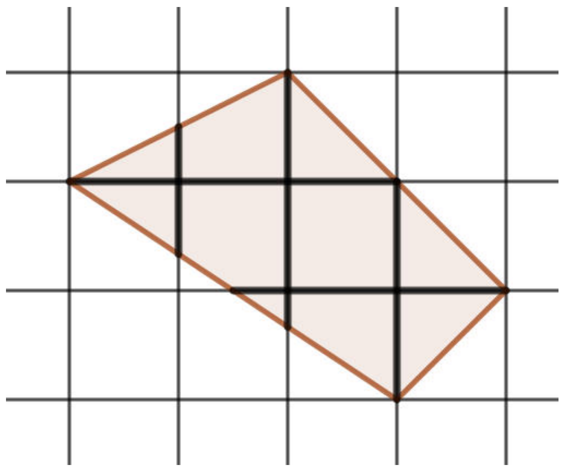
Soluciones Primer Nivel

Torneos Geométricos 2017 – 2º Ronda

1. En un papel cuadriculado con cuadrados de un centímetro de lado, se ha dibujado un cuadrilátero con vértices en los nodos del mismo (vértices de los cuadrados). Calcula la suma de las longitudes de los segmentos horizontales y la suma de las longitudes de los segmentos verticales marcados en la figura.



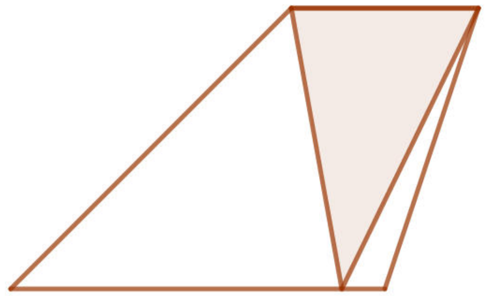
Solución: Los segmentos horizontales, que indicamos con **a** y *b*, descomponen al cuadrilátero en dos triángulos y un trapecio. Sumando las áreas de estas figuras, todas de altura *1cm*, obtendremos el área del cuadrilátero.

$$\frac{1}{2}a+\frac{a+b}{2}+\frac{1}{2}b=a+b$$

Por otra parte, se puede ver que el área del cuadrilátero es decir *5,5* cm^2 (por ejemplo, descomponiéndolo en triángulos o restando del rectángulo que los circunscribe los cuatro triángulos).

En forma similar se establece que la suma de las longitudes de los segmentos verticales es igual a valor del área del cuadrilátero. Si *a´, b´, c´, d´,* son los segmentos verticales, el área del cuadrilátero puede expresarse como: $\frac{1}{2}a'+\frac{a'+b'}{2}+\frac{b'+c'}{2}+\frac{1}{2}c'=a'+b'+c'$.

2- En el trapecio de la figura, la base mayor es el doble de la base menor. El área del triángulo sombreado es *3*cm^2. Calcula el área del trapecio.



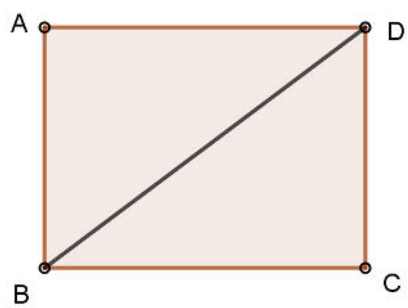
Solución: Llamando *a* y *b* a las longitudes de la base mayor y menor respectivamente, se verifica

a = 2b. Si *h* es la altura del trapecio (que es también la altura del triángulo sombreado) el área es:

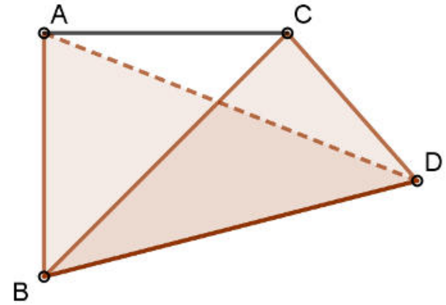
$$\frac{a+b}{2}\times h=\frac{3b}{2}\times h=3\times\frac{bh}{2}=3\times 3=9$$

3. En un rectángulo cuyos lados miden *3cm* y *4cm*, una diagonal determina dos triángulos que son caras de un tetraedro. El área de otra cara del tetraedro es $4cm^2$. ¿Cuántos centímetros cuadrados suman las cuatro caras del tetraedro?

Solución: Indicamos con *A, B, C, D* los vértices del tetraedro.



Las aristas de las caras que faltan, son *AD, DC* y la que une *A* con *C* en un caso, y *AB, BC* y la que une *A* con *C* en el otro.

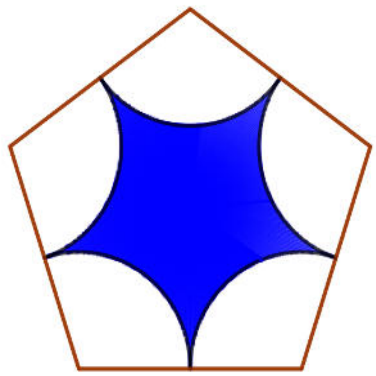


Luego, las dos caras que faltan son triángulos iguales, por lo tanto, la suma de las áreas es $20cm^2$.

Soluciones Segundo Nivel

Torneos Geométricos 2017 – 2º Ronda

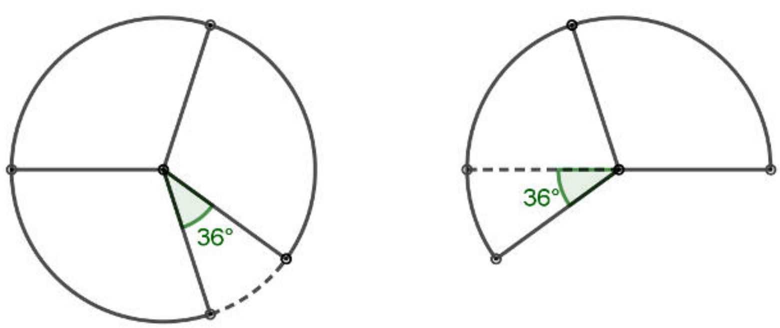
1. En un pentágono regular de *2cm* de lado, se trazan los arcos de circunferencias indicados en la figura, cuyos centros son los vértices del pentágono y cuyos extremos son los puntos medios de



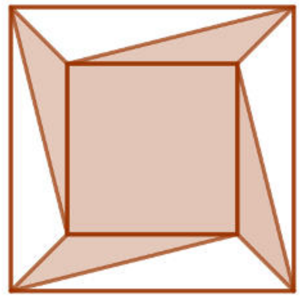
sus lados.

Calcula el perímetro de la figura sombreada, limitada por estos arcos.

Solución: La suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados, es *(n-2)π*. Cada ángulo interior del pentágono regular mide $\frac{3}{5}\pi$, por lo tanto la suma de los cinco arcos es *3π*, es decir el perímetro de la figura coincide con la longitud de una circunferencia de radio uno: 2 *π,* más la longitud de media circunferencia de radio uno: *π*. Es posible visualizar esta situación con las figuras siguientes.

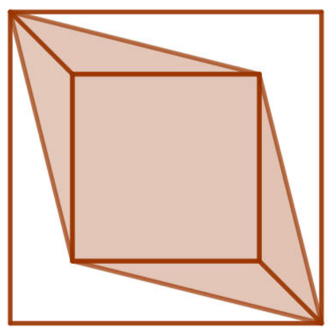


2. En la figura, las diagonales de los dos cuadrados están alineadas y miden *5cm* y *3cm*.



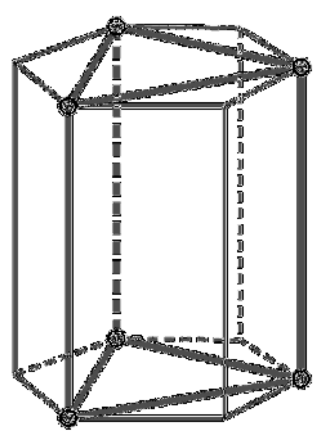
Halla el área de la región sombreada.

Solución: Reemplazamos dos de los triángulos por otros dos de igual área (tienen igual base: lado del cuadrado menor e igual altura: un medio de la diferencia de los lados de los cuadrados).



Se obtiene un rombo cuyas diagonales coinciden con las de los cuadrados. El área buscada es $\frac{5 \times 3}{2} cm^2 = 7,5 cm^2$.

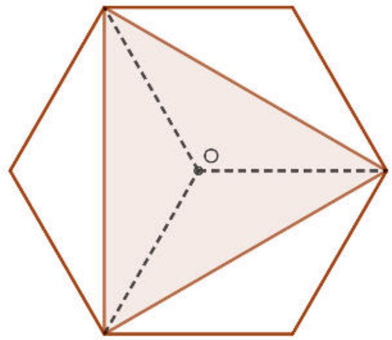
3. Un prisma recto de $8cm^3$ de volumen, con un hexágono regular como base, se secciona con tres



planos para obtener un prisma recto cuya base es un triángulo equilátero, tal como indica la figura.

Halla el volumen del nuevo prisma.

Solución: La base del prisma hexagonal duplica en área a la base del prisma triangular.



Como ambos prismas tienen la misma altura, el volumen solicitado es $4cm^3$.

Soluciones Tercer Nivel

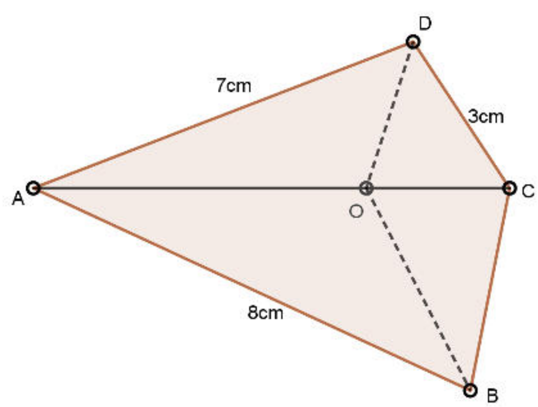
Torneos Geométricos 2017 – 2º Ronda

1. En un cuadrado de *18cm*^{2} de área, se dividen sus lados en tres partes iguales y se trazan segmentos paralelos como muestra la figura.

Halla la suma de las longitudes de estos segmentos.

Solución: El valor del área del cuadrado es igual a $\frac{1}{2}$ por el producto de las diagonales, de modo que el producto de las diagonales es *36* y en consecuencia, las diagonales miden *6cm*. Por la semejanza de triángulos, los segmentos paralelos a la diagonal son $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ de ésta, por lo tanto la suma es *(6+4+4+2+2)cm = 18cm*.

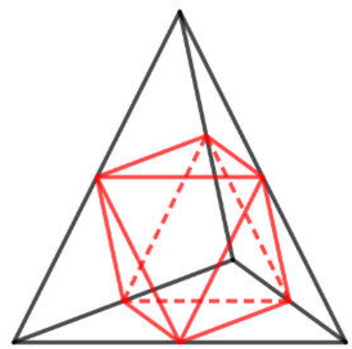
2. Las bisectrices de los ángulos en los vértices *B* y *D* del cuadrilátero *ABCD* se cortan en el punto *O* perteneciente a la diagonal *AC*. Los lados *AB*, *CD* y *DA* miden respectivamente *8cm*, *3cm* y *7cm*.



Halla el perímetro del cuadrilátero ABCD.

Solución: Por propiedades de la bisectrices, en el triángulo *ACD* se tiene DC/DA = CO/OA, y en el triángulo *ABC* es BC/BA = CO/OA, es decir: CB/8 = *3/7* de modo que *CB = 24/7* y el perímetro del cuadrilátero resulta (*18 + 24/7)cm = (150/7)cm = 21,429cm.*

3. Los puntos medios de las aristas de un tetraedro son los vértices de una bipirámide. Para pintar la superficie del tetraedro se usan *12* litros de pintura. ¿Cuántos litros de pintura se usarían para pintar la superficie de la bipirámide?

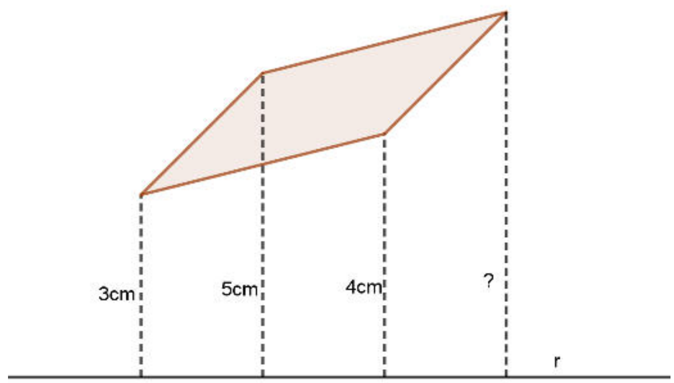


Solución: Las caras de la bipirámide pueden considerarse en dos grupos, uno de ellos está formado por los cuatro triángulos de puntos medios de las caras del tetraedro. La medida de cada lado es la mitad de la medida de la arista correspondiente en el tetraedro. Las cuatro caras restantes, son triángulos iguales a la respectiva cara opuesta perteneciente al grupo anterior. Luego el área de la bipirámide es la mitad del área del tetraedro y serán necesarios *6 litros* de pintura para pintarla.

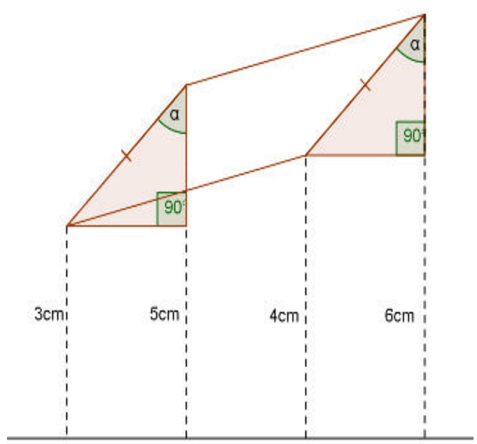
Soluciones Cuarto Nivel

Torneos Geométricos 2017 – 2º Ronda

1. Las distancias de tres vértices del paralelogramo de la figura a la recta *r* son *3cm*, *4cm* y *5cm*.



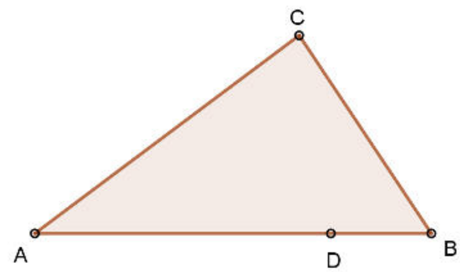
Halla la distancia desde el cuarto vértice a la recta *r*.



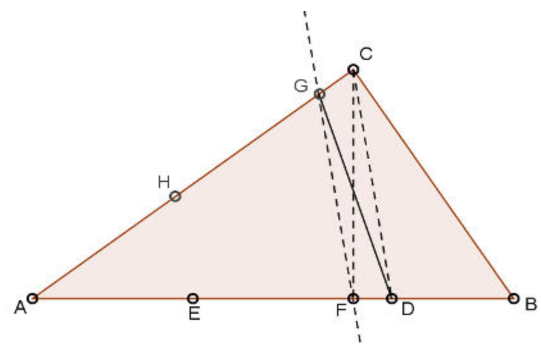
Solución: Los triángulos rectángulos sombreados son iguales (tienen la hipotenusa y un ángulo igual)

La medida del cateto opuesto a la hipotenusa es *5cm - 3cm = 2cm*. Luego, la distancia desde el cuarto vértice a la recta *r* es *4cm + 2cm = 6cm*.

2. Dado el triángulo *ABC* y el punto *D* en el lado *AB*, trazar por *D* dos segmentos que corten a *AC* descomponiendo el triángulo en tres figuras de igual área.

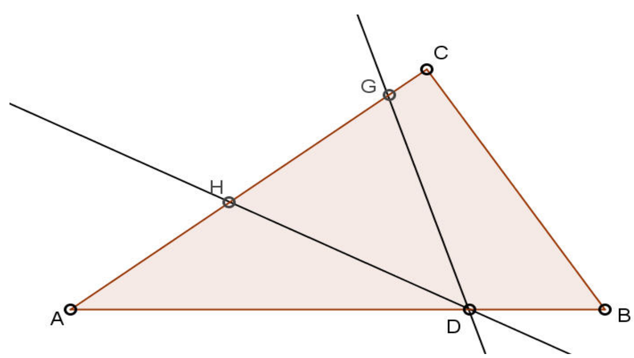


Solución: Los puntos *E* y *F* dividen al lado AB en tres segmentos iguales. Por *F* se traza una paralela a

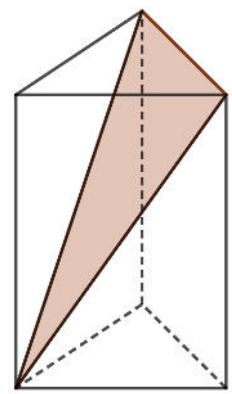


DC que corta en *G* al lado *AC.*

El área de *FBC*, igual al área de *DBCG,* es un tercio del área de ABC. Tomando *H* el punto medio de *AG*, se tiene que las rectas DG y DH cumplen lo pedido.



3. En la figura, la sección sombreada descompone al prisma triangular de *12cm³* de volumen, en dos cuerpos. Halla el volumen del cuerpo ubicado debajo de la sección.

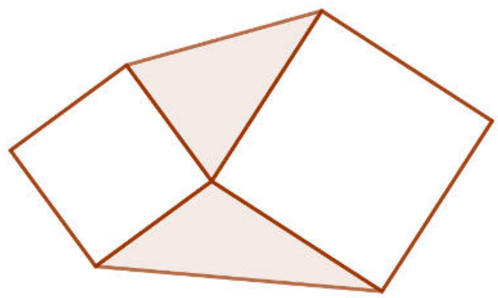


Solución: En la parte superior hay una pirámide invertida con base triangular; su volumen es un tercio del prisma. Luego el volumen de la pirámide en la parte inferior es $\frac{2}{3}$ del volumen del prisma, es decir, *8cm²*.

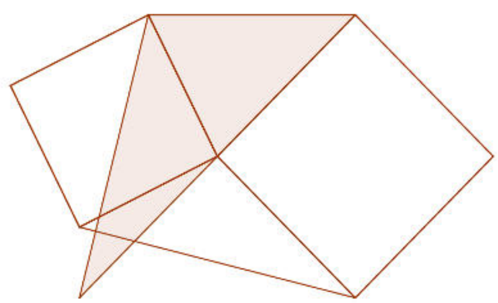
Soluciones Quinto Nivel

Torneos Geométricos 2017 – 2º Ronda

1. La figura está formada por dos cuadrados y dos triángulos. El área de la región sombreada mide $7cm^2$. Halla el área de cada triángulo.

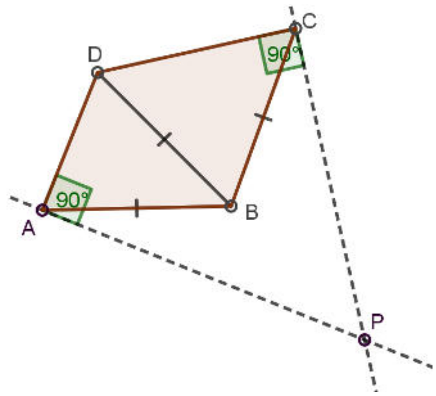


Solución: Si rotamos 90º alrededor del vértice común uno de los triángulos, ambos triángulos se unirán sobre la mediana de un nuevo triángulo de cuya área mide $7cm^2$.



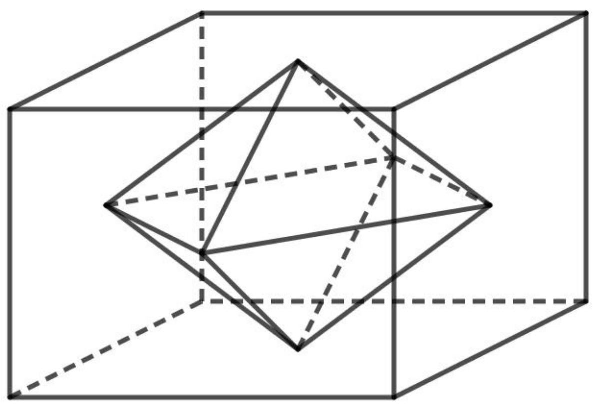
Luego el área de cada triángulo es *3,5cm²*.

2. Los lados *AB*, *BC* y la diagonal *BD* del cuadrilátero *ABCD* miden cada uno *1cm*. Por *A* se traza una perpendicular a *AD* y por *C* una perpendicular a *CD* que se cortan en el punto *P*. Halla la distancia de *D* a *P*.



Solución: El cuadrilátero *APCD* es inscriptible, pues los ángulos en *A* y en *C* suman 180º. *B* es el centro de la única circunferencia que pasa por los vértices del triángulo *ACD*; dado que esta circunferencia también pasa por *P*, *DP* debe ser un diámetro, es decir *DP* mide *2cm*.

3. Los centros de las caras de una caja de volumen $27cm^3$ son los vértices de una bipirámide. Halla el volumen de esta bipirámide.

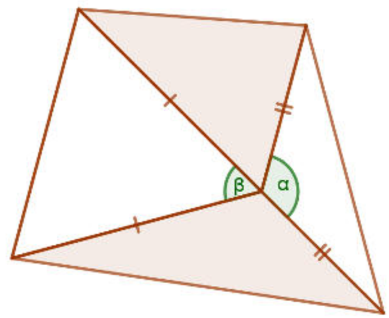


Solución: Puede hacerse coincidir la base de la bipirámide con el paralelogramo de Varignon de la base de la caja, es decir que el área de la base de la pirámide es la mitad del área de la base de la caja. Dado que la bipirámide y la caja tienen la misma altura, el volumen de la bipirámide es $\frac{1}{6}$ del volumen de la caja o sea $\frac{9}{2}cm^3$.

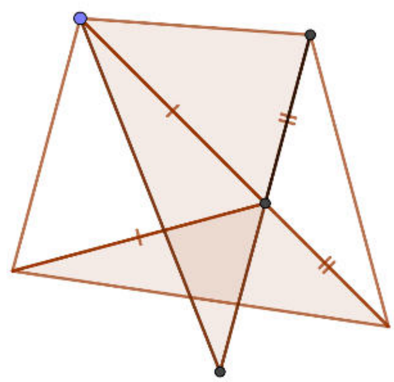
Soluciones Sexto Nivel

Torneos Geométricos 2017 – 2º Ronda

1. Los ángulos α y β en el vértice común de los triángulos isósceles suman 180º. Halla la relación entre las áreas de los triángulos sombreados.



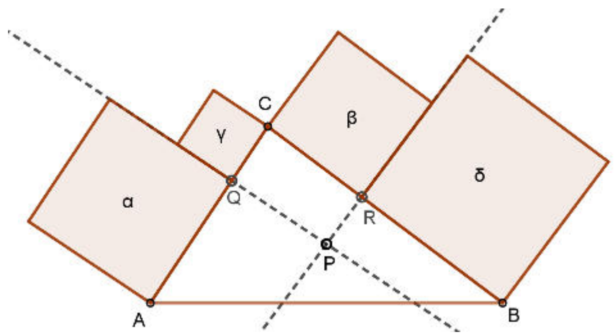
Solución: Si rotamos el triángulo de la parte inferior β grados en sentido horario alrededor del vértice



común , como α + β = 180º, ambos triángulos se unen sobre la mediana de un nuevo triángulo.

Luego la relación entre las áreas de los triángulos sombreados es 1.

2. En el triángulo *ABC* el punto *P* está en la mediatriz de *AB* y las rectas *PQ* y *PR* son perpendiculares a los lados *AC* y *BC* respectivamente. Los cuadrados de área $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, están sobre los lados como



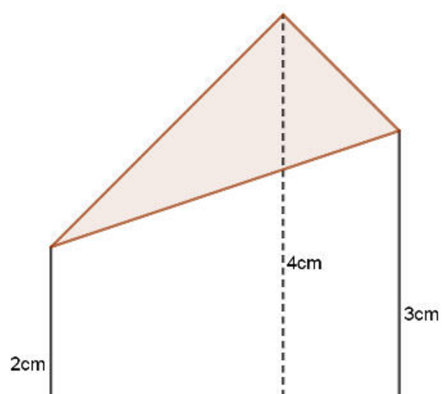
indica la figura.

Demuestra que $\alpha + \beta = \gamma + \delta$.

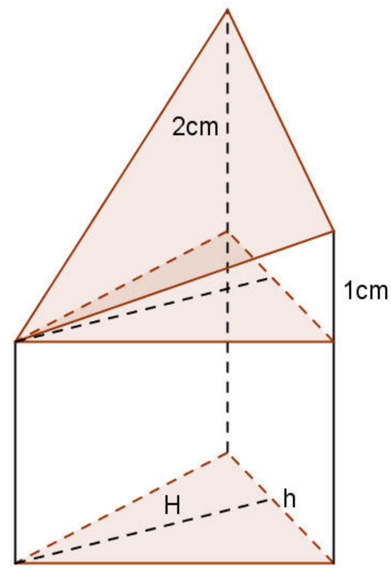
Solución: Por Pitágoras, es $CP^2 = \beta + RP^2 = \beta + PB^2 - \delta$, por otra parte $CP^2 = \gamma + QP^2 = \gamma + PA^2 - \alpha$, resulta

$\beta + PB^2 - \delta = \gamma + PA^2 - \alpha$ y dado que $PB = PA$ se obtiene $\beta - \delta = \gamma - \alpha$, o bien $\alpha + \beta = \gamma + \delta$.

3. Un prisma recto con base triangular de $5cm^2$ de área, es seccionado por un plano quedando un cuerpo con aristas laterales de *2cm, 3cm* y *4cm*, como indica la figura. Halla el volumen de este cuerpo.



Solución: Un plano paralelo a la base, a *2cm* de altura, descompone al cuerpo en un prisma, en la parte inferior, y una pirámide (apoyada sobre una cara lateral) en la parte superior.

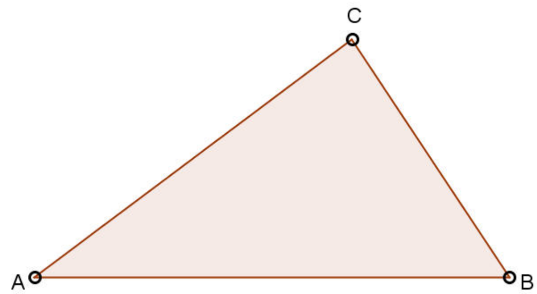


El volumen del prisma es *10cm³.* La pirámide tiene base trapezoidal recta, con base menor de *1cm* y base mayor de *2cm*. La cara lateral en la que se apoya la pirámide es igual a la base del cuerpo, es decir, la altura de la pirámide es igual a la altura *H* marcada en la base del cuerpo y la altura del trapecio es igual al lado *h* de la base del cuerpo. Teniendo en cuenta que *hxH = 10*, el volumen de la pirámide es (3*/2x10)cm³ = 15cm³*. Luego el volumen del cuerpo es *25cm³*.

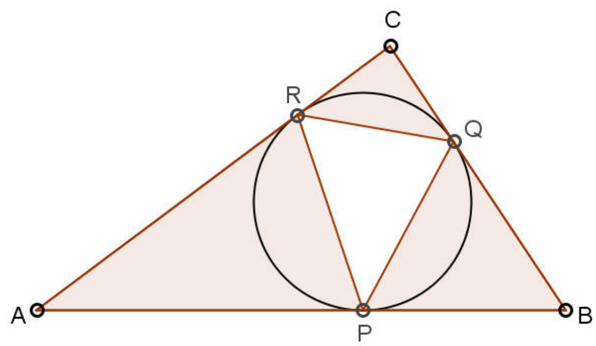
Soluciones Séptimo Nivel

Torneos Geométricos 2017 – 2º Ronda

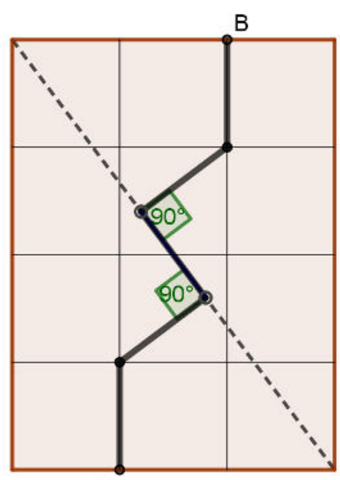
1. Dado el triángulo *ABC* determina puntos *P, Q y R* respectivamente en los lados *AB, BC y CA* del mismo, de modo que los triángulos *APR, BQP* y *CRQ* sean isósceles.



Solución: Si se tiene en cuenta que los dos segmentos de tangentes trazados desde un punto exterior a una circunferencia son iguales, entonces los puntos de contacto de la circunferencia inscripta con los lados del triángulo *ABC* dan una solución a este problema.

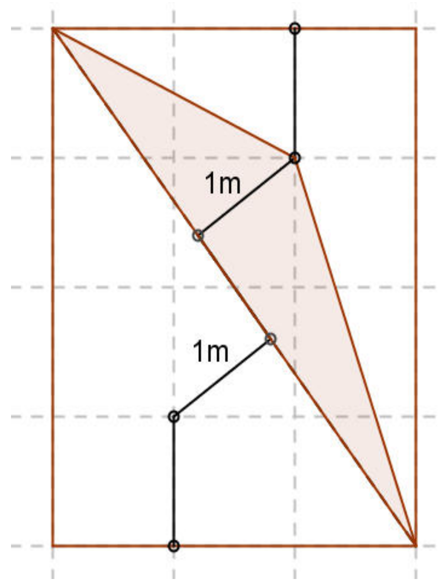


2. En un rectángulo cuadriculado de lados *3* y *4* metros, se ha trazado una poligonal que une los

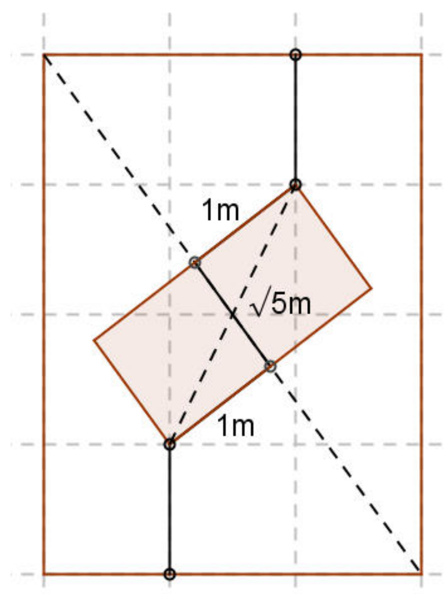


puntos *A* y *B*, según muestra la figura. Halla la longitud de la poligonal.

Solución: La diagonal del rectángulo mide *5m* (por Pitágoras). El área del triángulo sombreado en la figura es (5/2)*m²* ($6m^2 - 1m^2 - 1m^2 - \frac{3}{2}m^2 = \frac{5}{2}m^2$).

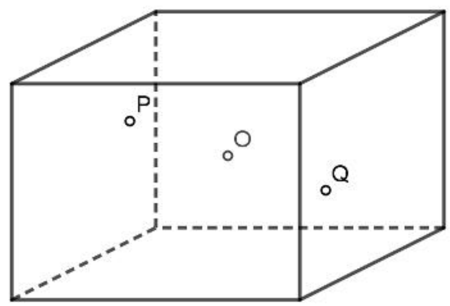


Luego su altura mide *1m* y lo mismo puede decirse del otro segmento de la poligonal que es



perpendicular a la diagonal del rectángulo. Si observamos el rectángulo de la figura anterior notamos que su diagonal mide $\sqrt{5}m$ y como un lado del rectángulo mide *2m, el otro lado debe medir 1m*. Se concluye que la longitud de la poligonal es *5m*.

3. Un paralelepípedo de $20cm^3$ de volumen y centro *O* es seccionado por un plano que contiene un punto *P* y su simétrico *Q* respecto de su centro *O*. Halla los volúmenes de los cuerpos en los queda descompuesto el paralelepípedo. La figura se muestra un caso posible.



Solución: El plano de la sección contiene los puntos *P* y *Q*, luego contiene la recta que pasa por *P* y *Q*. Dado *P* y *Q* son simétricos respecto de *O*, *O* es el punto medio entre *P* y *Q*, es decir, *O* está en el plano de la sección, luego divide al paralelepípedo en cuerpos de igual volumen: $10cm^3$.