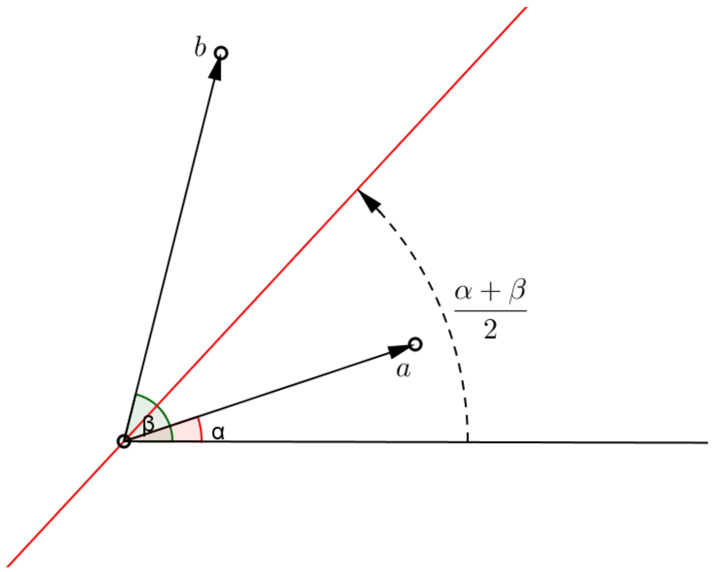
Problemas Propuestos

1. Dados a y b complejos no nulos, mostrar que las raíces cuadradas de $a \cdot b$ están sobre la bisectriz del ángulo que forman los vectores a y b.

Solución: Las raíces cuadradas de un número complejo μ tienen por argumento a la mitad del argumento de μ y a la mitad del argumento de μ más π.
Si α y β son los respectivos argumentos de a y b, el argumento de $a \cdot b$ es $\alpha+\beta$ ó $\alpha+\beta-2\pi$ según $\alpha+\beta$ sea menor que 2π ó mayor o igual que 2π. En cada caso, los argumentos de las raíces cuadradas de $a \cdot b$ son:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ y } \frac{\alpha+\beta}{2}+\pi \text{ ó } \frac{\alpha+\beta}{2}-\pi \text{ y } \frac{\alpha+\beta}{2}$$

En cualquier caso, las raíces cuadradas $a \cdot b$ están en la bisectriz argumentos de a y de b.



2. Hallar una expresión para la distancia desde un punto u a la recta de ecuación $aw+\overline{aw}+b=0$.

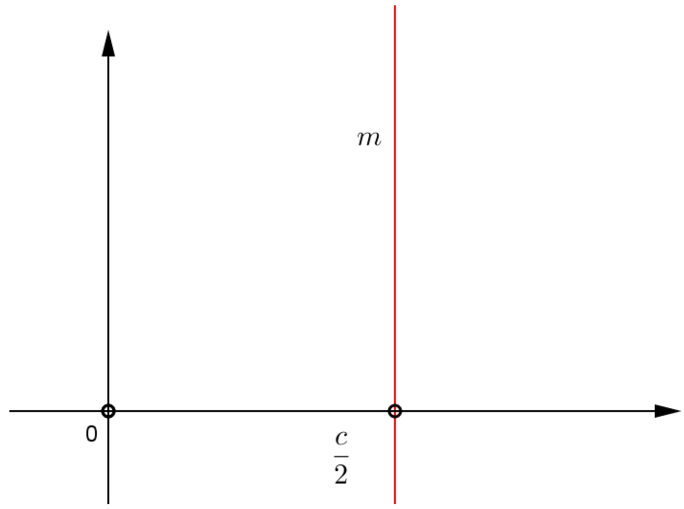
Solución: Vamos modificar la ecuación de esta recta, la que denotaremos con l, dividiendo ambos miembros de la ecuación por $|a|$, resulta:

$$\frac{a}{|a|}w+\overline{\frac{a}{|a|}w}+\frac{b}{|a|}=0$$

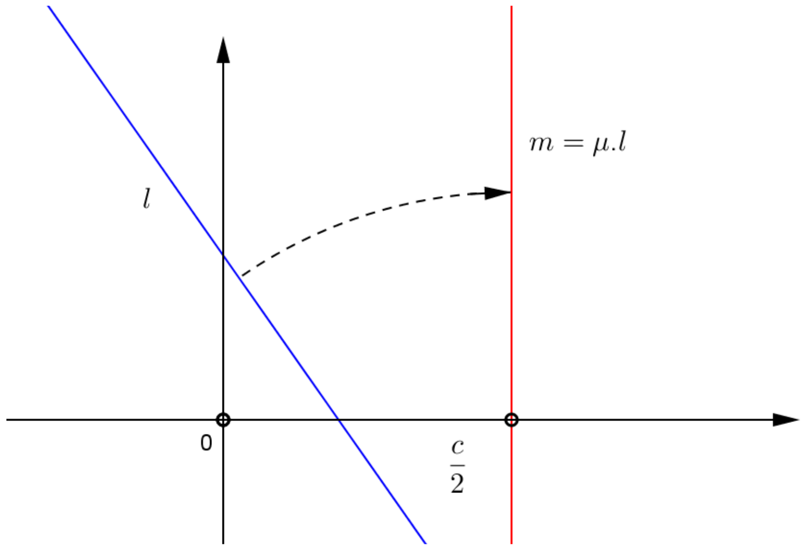
Notando $\mu=\frac{a}{|a|}$ y $c=-\frac{b}{|a|}$ la ecuación queda:

$$\mu \cdot w+\overline{\mu \cdot w}=c$$

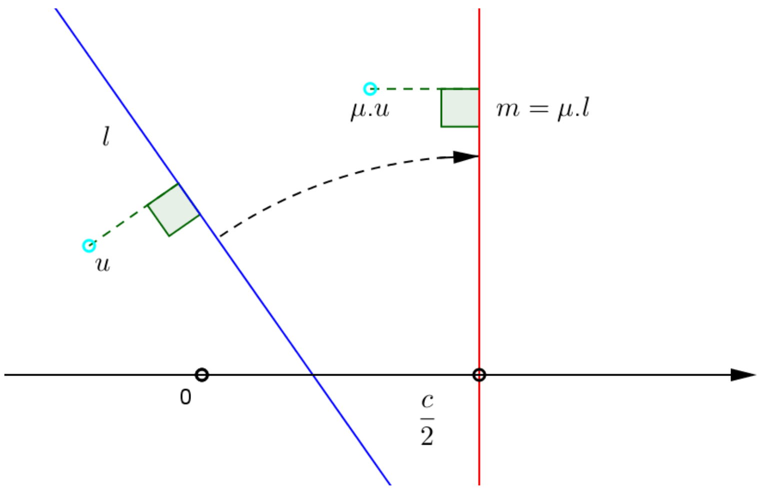
donde μ es un complejo unitario, o sea de módulo igual a *1*. El primer miembro de la ecuación es igual a dos veces la parte real de $\mu \cdot w$, de esto surge que los números $\mu \cdot w$ están en la recta m que se indica en la siguiente figura.



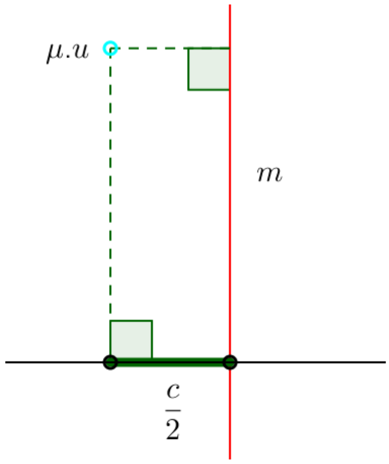
Como µ es un complejo unitario, la multiplicación por µ produce una rotación. La recta *m* es el resultado de multiplicar por µ los elementos *w* en la recta *l*.



Queda claro que la distancia desde *u* a *l*, es iguala la distancia desde µ.*u* a µ.*l*, es decir desde µ.*u* a *m*.



Pero la distancia desde μ.*u* a *m*, puede calcularse como la distancia desde la parte real de μ.*u* a $\frac{c}{2}$.

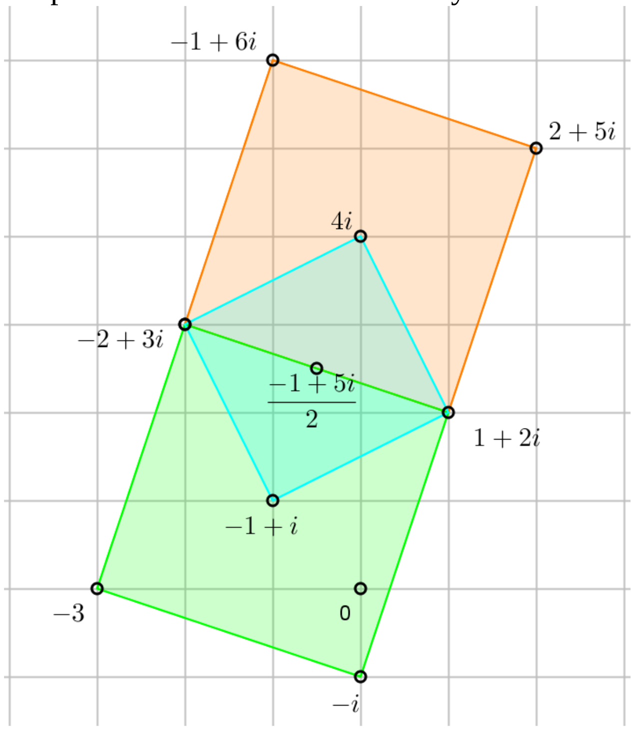


Dado que la parte real de μ.*u* es igual a $\frac{\mu \cdot u + \overline{\mu \cdot u}}{2}$, la distancia buscada es:

$$\left|\frac{\mu \cdot u + \overline{\mu \cdot u}}{2} - \frac{c}{2}\right| = \left|\frac{a \cdot u + \overline{a \cdot u} + b}{2 \cdot |a|}\right| = \frac{|a \cdot u + \overline{a \cdot u} + b|}{2 \cdot |a|}$$

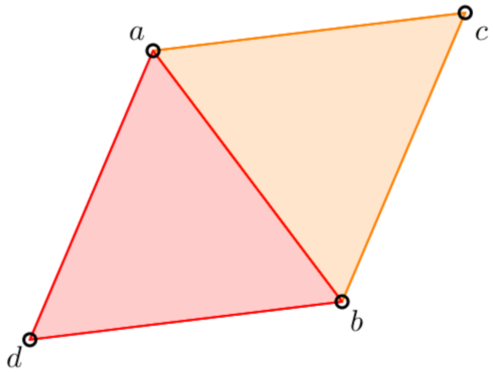
3. Los números *1+2i* y *-2+3i* son vértices de un cuadrado. Hallar los posibles vértices y centros del cuadrado.

Solución: Si los números dados son los vértices de un lado del cuadrado, hay dos casos posibles, en cambio, si estos números son vértices de una diagonal del cuadrado, hay un solo caso. La figura a continuación, muestra los casos posibles indicando los vértices y centros de los cuadrados obtenidos.



4. Sean *abc* y *abd* dos triángulos equiláteros, $c \neq d$. Mostrar que $c+d=a+b$ y que $cd=a^2-ab+b^2$.

Solución: Observemos que estos dos triángulos dan lugar a un paralelogramo,



Si *ABCD* son los sucesivos vértices de un paralelogramo, se cumple la igualdad $A+C=B+D$, ver Problema 5 en la página 4 de la Nota 6 de geometría, ver también el Problema 20 de la presente Nota de geometría.

Consideremos $\omega=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ la raíz sexta de la unidad cuyo argumento es 60°. Expresando:

$$c=a+\omega(b-a)$$
$$d=a+\overline{\omega}(b-a)$$

Operando:

$$c\cdot d=a^2+a(b-a)(\omega+\omega)+(b-a)^2=a^2-ab+b^2$$

5. Sean *a*,*b*,*c* tres números complejos unitarios tales que $a+b+c=0$. Mostrar que el triángulo *abc* es equilátero.

Solución: La distancia entre *a* y *b* puede calcularse como:

$$|a-b|=|a-(-a-c)|=|c|=1$$

De la misma manera se puede ver que $|a-c|=|b-c|=1$.

6. Mostrar que una condición necesaria y suficiente para que el triángulo *abc* sea equilátero es que:

$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}=0$$

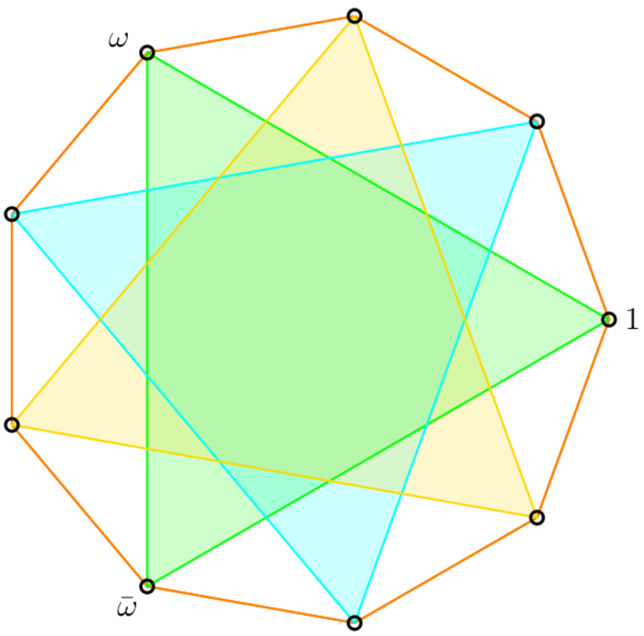
Solución: Ver el Problema 21 de la presente Nota de geometría.

7. Descomponer el polinomio x^9-1 en tres factores polinomiales siendo cada factor de grado tres.

Solución: Las *9* raíces de este polinomio son los vértices del polinomio regular de *9* lados dado en la siguiente figura, donde:

$$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

es una raíz cúbica de la unidad.

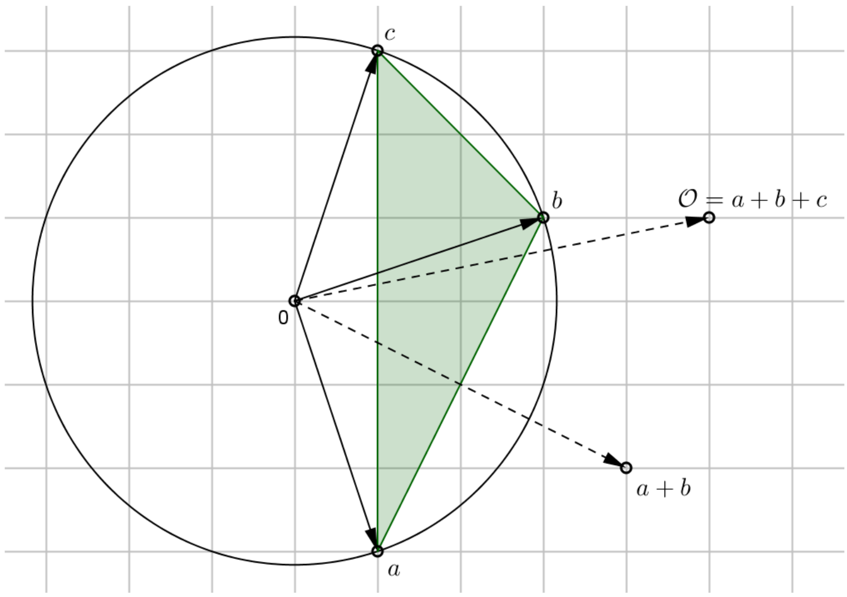


Los vértices del triángulo verde, son las raíces cúbicas de la unidad, es decir las raíces del polinomio $X^3 - 1$. Los vértices del triángulo celeste elevados al cubo dan como resultado ω, o sea que son las raíces cúbicas del polinomio $X^3 - \omega$. Finalmente, los vértices del triángulo amarillo elevados al cubo dan como resultado $\overline{\omega}$, siendo las raíces de $X^3 - \overline{\omega}$. La factorización se puede obtener como:

$$X^9 - 1 = (X^3 - 1)(X^3 - \omega)(X^3 - \overline{\omega})$$

8. Si los vértices de un triángulo y su circuncentro están en una cuadrícula, mostrar que el ortocentro del triángulo también está en la cuadrícula.

Solución: Según el Problema 13, en la páginas 15 de la presente Nota de geometría, el problema se resuelve con la expresión del ortocentro si el circuncentro estuviera en el origen de coordenadas, es decir, en el cero.



En otro caso, si el triángulo es *uvw* con circuncentro *P*, su ortocentro está dado por $O+P$ donde O es el ortocentro de *abc* siendo $a=u-P, b=v-P, c=w-P$, es decir el ortocentro de *uvw* está dado por:

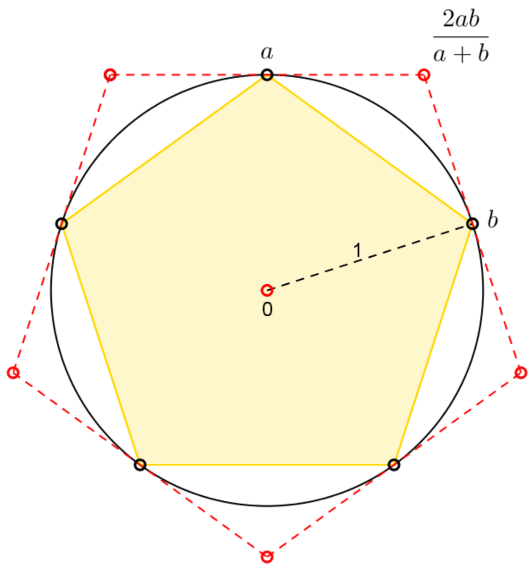
$$u+v+w-2P$$

9. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los vértices de un polígono regular inscripto en la circunferencia unitaria, mostrar que:

$$\frac{2a_i a_{i+1}}{a_i + a_{i+1}}$$

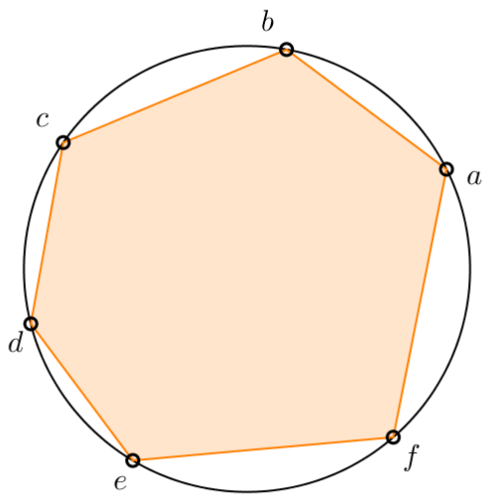
son los vértices de un polígono regular, Aquí convenimos $a_{n+1} = a_1$.

Solución: La solución la da la expresión de la intersección de dos restas tangentes de la circunferencia unitaria, ver página 81 en el Apéndice de la presente nota de geometría. La siguiente figura ilustra la situación en el caso de un pentágono regular.



10. *Teorema de Pacal*. Mostrar que si un hexágono puede inscribirse en una circunferencia, los puntos en las intersecciones de las prolongaciones de pares de lados opuestos están alineados.

Solución: Supongamos el hexágono inscripto en la circunferencia unitaria, esto no cambia el problema.



Según la expresión para la intersección de las prolongaciones de dos cuerdas en esta circunferencia, ver página 80 en el Apéndice de la presente nota de geometría, se tienen los puntos:

$$p=\frac{ab(d+e)-de(a+b)}{ab-de},\ q=\frac{bc(e+f)-ef(b+c)}{bc-ef},\ r=\frac{cd(f+a)-fa(c+d)}{cd-fa}$$

Por propiedades de la conjugación se tiene:

$$\overline{p}=\frac{\overline{ab(d+e)-de(a+b)}}{\overline{ab-de}}=\frac{\overline{a}\,\overline{b}(\overline{d}+\overline{e})-\overline{d}\,\overline{e}(\overline{a}+\overline{b})}{\overline{a}\,\overline{b}-\overline{d}\,\overline{e}}$$

Como para complejos unitarios el conjugado coincide con el inverso, resulta:

$$\overline{p}=\frac{\dfrac{d+e}{abde}-\dfrac{a+b}{abde}}{\dfrac{de-ab}{abde}}=\frac{a+b-(d+e)}{ab-de}$$

Del mismo modo se obtiene:

$$\overline{q}=\frac{b+c-(e+f)}{bc-ef},\ \ \overline{r}=\frac{c+d-(f+a)}{cd-fa}$$

Ahora evaluamos:

$$\overline{p-r}=\frac{a-d}{(ab-de)(cd-fa)}(ab-de-bc+ef+cd-fa)$$

$$\overline{q-r}=\frac{c-f}{(bc-ef)(cd-fa)}(ab-de-bc+ef+cd-fa)$$

Entonces:

$$\overline{\frac{p-r}{q-r}}=\overline{\left(\frac{p-r}{q-r}\right)}=\frac{\overline{(a-d)(bc-ef)}}{(c-f)(ab-de)}=\frac{\dfrac{(d-a)(ef-bc)}{abcdef}}{\dfrac{(f-c)(de-ab)}{abcdef}}=\frac{(a-d)(bc-ef)}{(c-f)(ab-de)}$$

Resulta ser $\dfrac{p-r}{q-r}$ un número real, luego *p, q* y *r* están alineados.