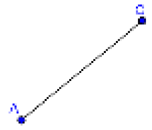
Soluciones Nota nº 2

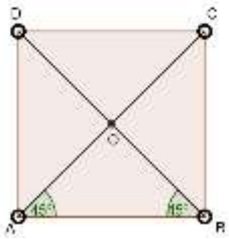
Problemas propuestos

1. El segmento *AC* es una diagonal del cuadrado *ABCD*. Reconstruir el cuadrado.

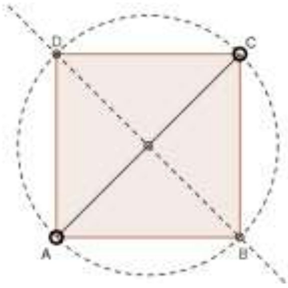


Si el segmento *AC* fuera una diagonal del rectángulo *ABCD*, que no es cuadrado, ¿es posible reconstruirlo?

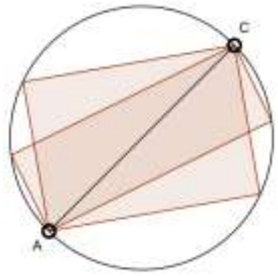
Solución: Las diagonales de un cuadrado se cortan en sus putos medios, por ser éste un paralelogramo. Por otra parte, las diagonales de un cuadrado son perpendiculares; para ver esto observamos en la siguiente figura



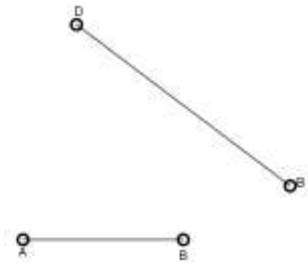
que el triángulo *ABO* tiene dos ángulos de *45º*, los que comparte con los triángulos rectos e isósceles *ABC* y *ABD*.
Para reconstruir el cuadrado a partir de su diagonal *AC*, será suficiente trazar la mediatriz de *AC* y la circunferencia que tiene por diámetro a *AC*.



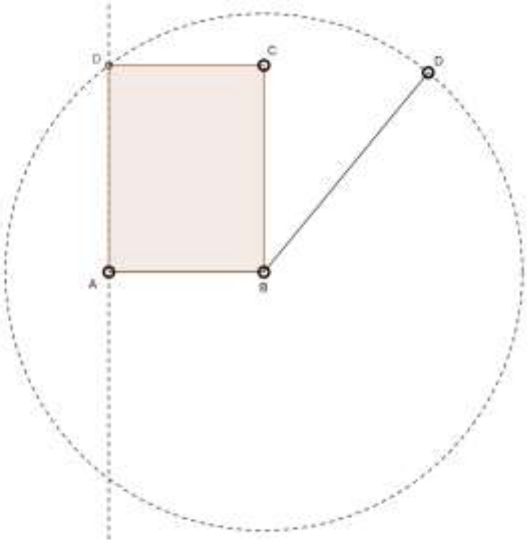
Si el segmento *AC* fuera una diagonal del rectángulo *ABCD*, que no es cuadrado, no es posible reconstruirlo por no estar determinado a partir del dato. Los siguientes ejemplos ilustran la situación.



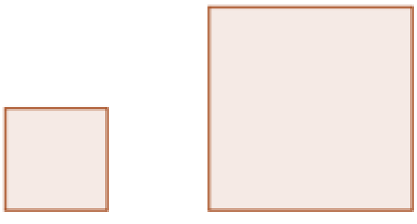
2. Los segmentos *AB* y *BD* son un lado y la diagonal de un rectángulo. Reconstruir el rectángulo.



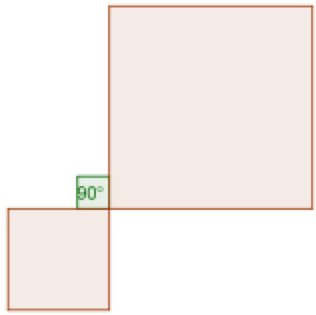
Solución: Trazamos la recta perpendicular al segmento *AB* por el punto *A*. Trazamos la circunferencia de radio *BD* con centro en el vértice *B* del segmento *AB*.



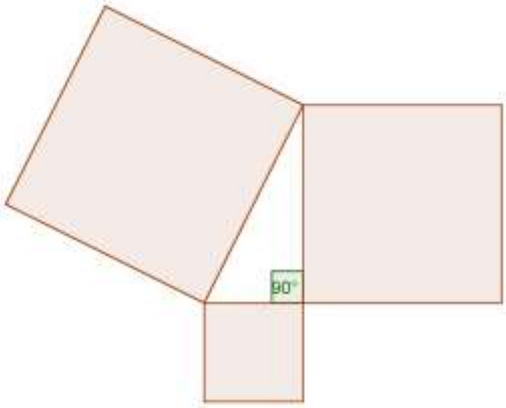
3. Usando regla y compás, construir un cuadrado cuya área sea igual a la suma de las áreas de los cuadrados dados en la figura:



Solución: Dibujamos los cuadrados dados de modo que tengan un vértice común y tal como indica la figura, quede formado un ángulo de 90º.



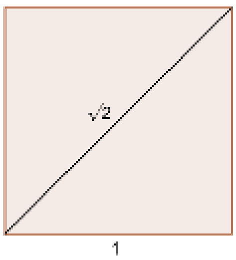
Dibujamos un cuadrado cuyo lado está dado por los vértices de los cuadrados dados, sobre el ángulo de 90º.



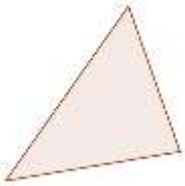
El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo formado, es la suma de las áreas de los cuadrados dados, cuyos lados son los catetos de dicho triángulo.

4. El segmento en la figura mide una unidad, usando regla y compás, construir un segmento de longitud igual a $\sqrt{2}$.

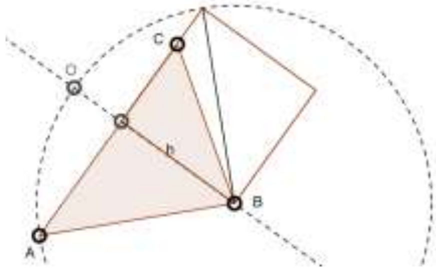
Solución: Construimos un cuadrado de lado 1 y su diagonal mide $\sqrt{2}$.



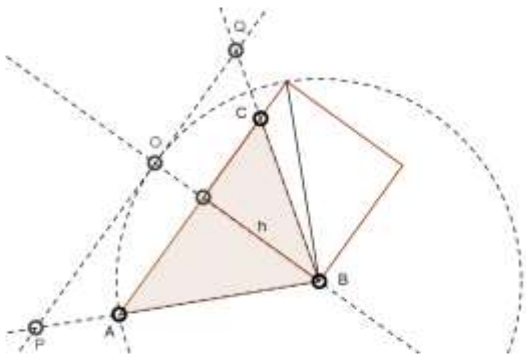
5. Dado un triángulo de área 1, construir usando regla y compás un triángulo semejante al dado de área 2.



Solución: Denotemos con *ABC* el triángulo dado. Dibujamos un cuadrado sobre una de la altura *h* del triángulo y una circunferencia de centro *B* usando como radio una diagonal del cuadrado, que corta a la prolongación de *h* en el punto *O*.



La diagonal del cuadrado mide $\sqrt{2}\times h$, de modo que $BO=\sqrt{2}\times h$. Si por el punto *O* trazamos la paralela a *AC*, la misma corta a las prolongaciones de los lados *AB* y *BC* en los puntos *P* y *Q*.



Por construcción, los triángulos *PBQ* y *ABC* son semejantes (ver página 15 de segunda nota de geometría) y la razón de semejanza es $\sqrt{2}$, es decir:

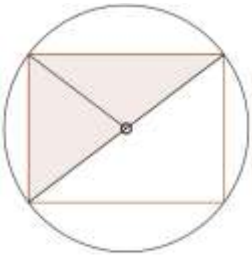
$$PQ=\sqrt{2}AC$$

De modo que el área de PBQ es:

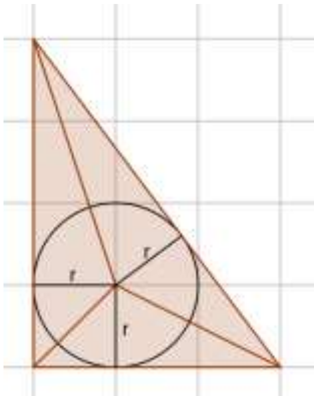
$$AreaPBQ=\frac{1}{2}PQ\times BO=\frac{1}{2}\sqrt{2}AC\times\sqrt{2}h=2\frac{1}{2}AC\times h=2\times AreaABC$$

6. Determinar los radios de las circunferencias inscritas y circunscriptas a un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 respectivamente.

Solución: Como $5^2 = 4^2 + 3^2$, el triángulo es rectángulo. En todo triángulo rectángulo el radio de la circunferencia circunscripta es igual a la mitad de la hipotenusa. En efecto, como ilustra la figura, si completamos un rectángulo a partir del triángulo, sus diagonales son iguales y se cortan en sus puntos medios.



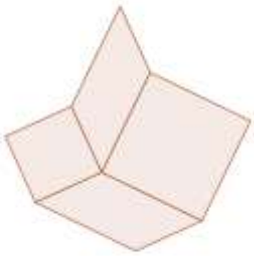
En consecuencia el radio de la circunferencia circunscripta mide *2,5cm*.
Para encontrar el radio de la circunferencia inscripta, mostramos el triángulo en una cuadrícula.



Todo hace suponer que dicho radio es 1. Para verificar esta afirmación calculamos el área del triángulo de dos maneras.

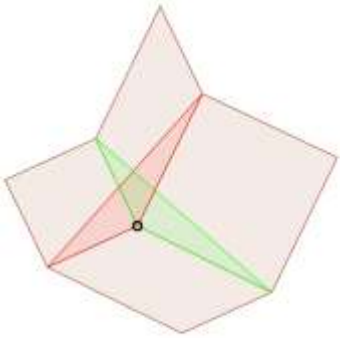
$$\frac{1}{2}3\times 4 = \frac{1}{2}3\times r + \frac{1}{2}4\times r + \frac{1}{2}5\times r = \frac{1}{2}12\times r$$

de donde resulta $r = 1$,
7. Dos cuadrados y dos paralelogramos se unen como muestra la figura:

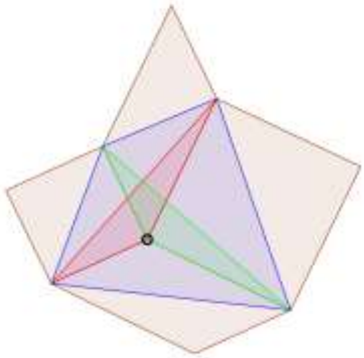


La distancia entre los centros de los cuadrados es 2 cm, ¿Cuánto es la distancia entre los centros de los paralelogramos?
Sugerencia: Usar un programa de geometría interactiva para visualizar esta situación. ¿Qué otra propiedad observa?

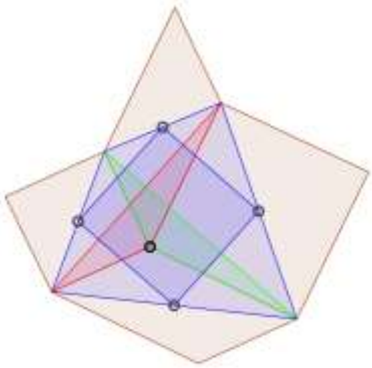
Solución: La figura muestra que una rotación de 90º en el sentido horario, con centro en el vértice común, transforma el triángulo rojo en el triángulo verde.



De modo que las diagonales del cuadrilátero azul en la figura

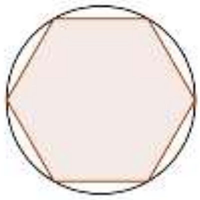


son iguales y perpendiculares. En consecuencia, el paralelogramo de Varignon des este cuadrilátero es un cuadrado.



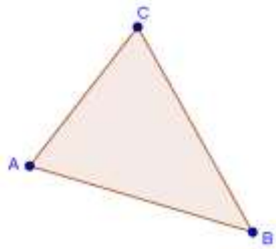
Los vértices de este cuadrado, son los centros de los cuadrados y los paralelogramos dados. Por lo tanto la distancia pedida es igual a *2cm*.

8. Un hexágono regular de perímetro *6cm* se haya inscripto en una circunferencia. Determinar el perímetro de esta circunferencia.

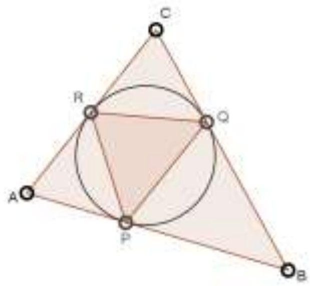


Solución: Es problema es parte del problema 9 de la Nota 2.

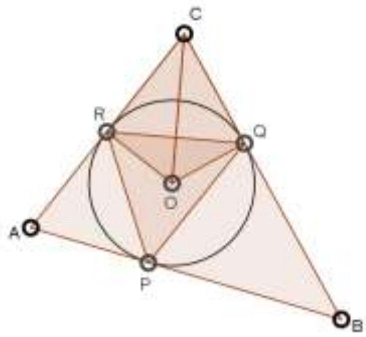
9. Inscribir un triángulo *PQR* en el triángulo de papel *ABC* de modo que al recortar *PQR* de *ABC* se obtengan tres triángulos isósceles.



Solución: Los puntos de tangencia de la circunferencia inscripta con los lados del triángulos son los vértices de *PQR*.

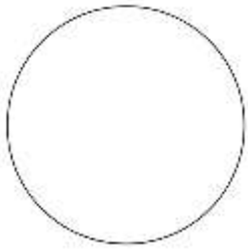


Veremos que *CRQ* es isósceles. Si *O* es el centro de la circunferencia inscripta, observamos que los triángulos *CRO* y *CQO* son iguales.

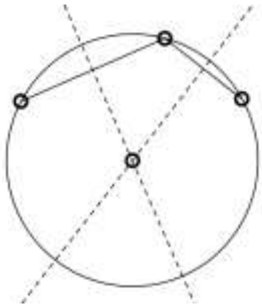


En efecto, ambos triángulos son rectángulos, en *R* y *Q* respectivamente, comparten la hipotenusa *CO* y el cateto *OR* es igual al cateto *OQ*, luego *CR* = *CQ*.
Un razonamiento análogo muestra que *APR* y *BQP* también son isósceles.

10. Usando regla y compás, determinar el centro de la circunferencia:

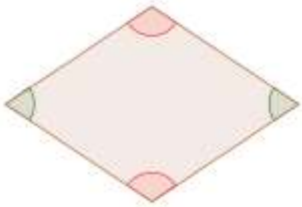


Solución: Marcamos tres puntos sobre la circunferencia. Trazamos dos mediatrices asociadas con estos puntos.

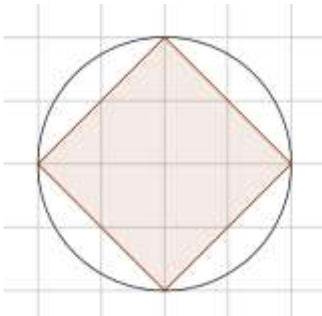


11. Un rombo se haya inscripto en una circunferencia de radio *2cm*. Hallar el área del rombo.

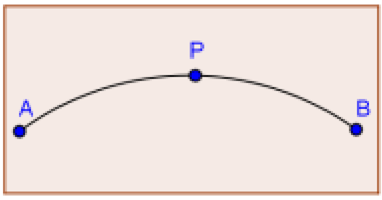
Solución: En un rombo, los ángulos opuestos son iguales.



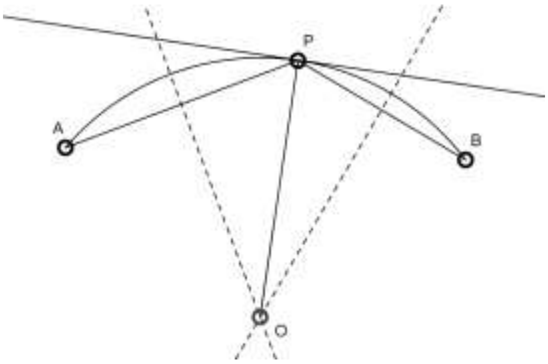
Por otra parte, en un cuadrilátero inscriptible, los ángulos opuestos suman *180º*. Luego el rombo es un cuadrado y su área es el producto de las diagonales dividido dos, es decir $8cm^2$.



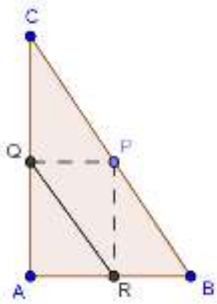
12. Usando regla y compás, trazar la tangente en el punto *P* sobre el arco de circunferencia *AB*



Solución: Encontramos el centro *O* de la circurnferencia trazando las mediatrices de las cuerdas *AP* y *PB*. Por el punto *P* trazamos la perpendicular al radio *OP*. Esta recta es la tangente pedida.

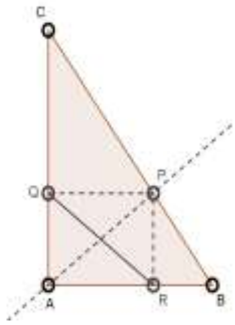


13. En el triángulo rectángulo *ABC*, desde un punto *P* de la hipotenusa se trazan perpendiculares a los catetos determinando los puntos *Q* y *R*. Ubicar *P* para que el segmento *QR* sea de longitud mínima.



Sugerencia: Usar un programa de geometría interactiva para visualizar esta situación.

Solución: Dado que *ARPQ* es un rectángulo, se tiene que *QR* = *AP*, pero *AP* es mayor o igual que la altura de *ABC* respecto de la hipotenusa. Por lo tanto la longitud mínima se obtiene ubicando *P* el pie de dicha altura.



14. Seccionar un cubo con un plano de modo que en uno de los semiespacios quede exactamente:

i) un vértice.

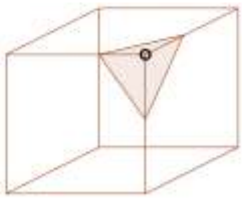
ii) dos vértices.

iii) tres vértices.

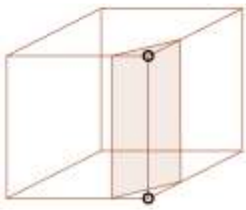
iv) cuatro vértices.

Solución: Mostramos en cada caso la sección del plano con el cubo.

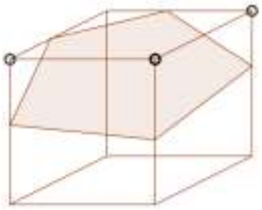
i)



ii)



iii)



iv)