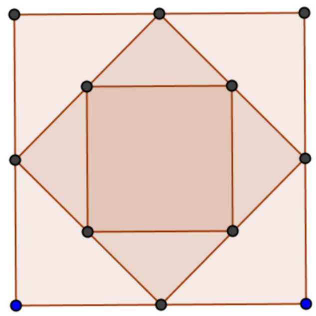
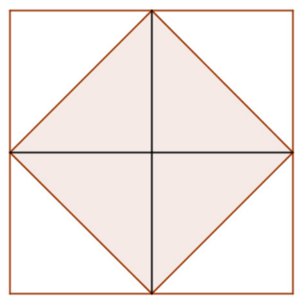
TORNEOS GEOMÉTRICOS 2014

Soluciones - Primer Nivel

Problema 1: Halla las áreas de los cuadrados cuyos vértices son los puntos medios de los lados de otro cuadrado, como indica la figura, sabiendo que el mayor de todos los cuadrados tiene una arista de *8cm*.

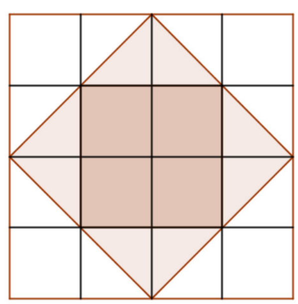


Solución: El cuadrado cuyos vértices son los puntos medios de otro cuadrado, tiene por área a la mitad del cuadrado donde se inscribe, según se aprecia en la siguiente figura.

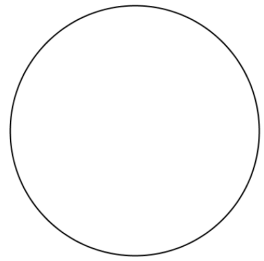


De manera que las áreas buscadas son $32cm^2$ y $16cm^2$ respectivamente.

Otra forma puede ser usando la figura:

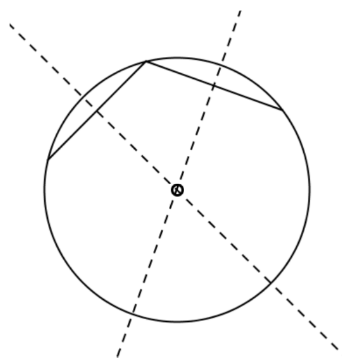


Problema 2: Hay que hacer un agujero en el centro de este disco:



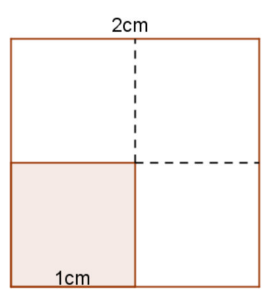
Indica cómo encontrar este centro usando regla y compás.

Solución: Usamos que la mediatriz de cualquier cuerda pasa por el centro del círculo y construimos las mediatrices de dos cuerdas cualesquiera.



Problema 3: Un cubo de *2cm* de arista se armó usando *20* gramos de cartulina. ¿Cuántos gramos de la misma cartulina se usarán para armar un cubo de *1cm* de arista?

Solución: Cada cara del cubo de *1cm* de arista, requiera la cuarta parte de cartulina que se usa en una cara del cubo de *2cm* de arista.

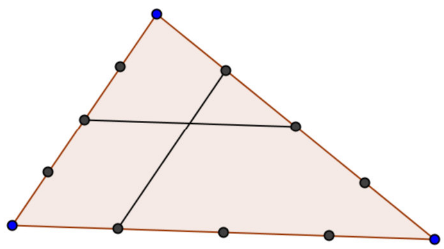


En consecuencia, su usará *5* gramos de cartulina.

TORNEOS GEOMÉTRICOS 2014

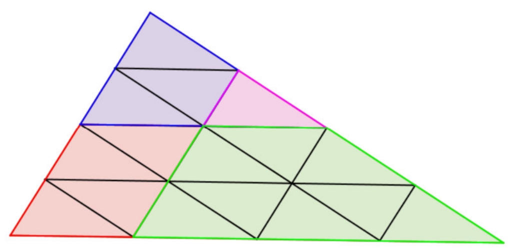
Soluciones - Segundo Nivel

Problema 1: Los lados de un triángulo de área *32cm²* se dividen en cuatro partes iguales. Los dos segmentos indicados en la figura, dividen al triángulo dado en cuatro regiones.



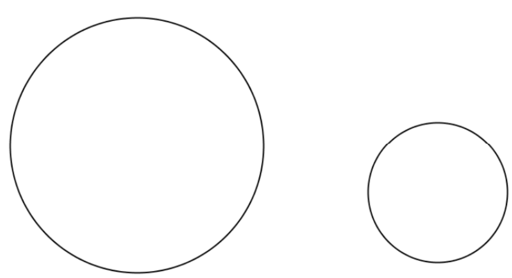
Determina el área de las cuatro regiones.

Solución: Trazando paralelas a los lados por los puntos marcados en el borde del triángulo, se tiene una división del mismo en *16* triángulos iguales de $2cm^2$ cada uno.

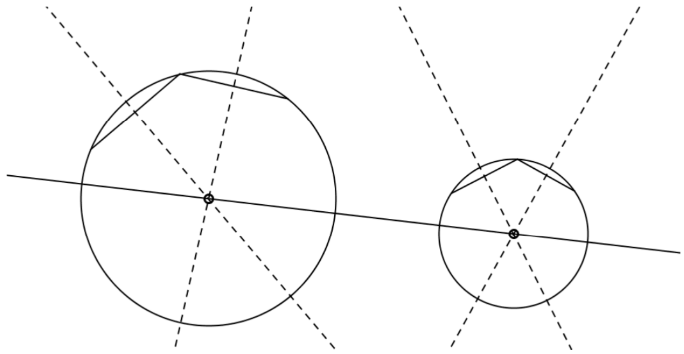


Las áreas buscadas son $8cm^2$, $6cm^2$, $2cm^2$ y $16cm^2$ respectivamente.

Problema 2: Indica cómo trazar, usando regla y compás, una recta que corte a cada uno de los círculos dados en dos semicírculos.



Solución: Las cuerdas que dividen a un círculo en dos semicírculos son los diámetros, por esto, la recta buscada debe pasar por los centros de ambas circunferencias. Para determinar los centros, usamos el hecho que la mediatriz de cualquier cuerda pasa por el centro del círculo.

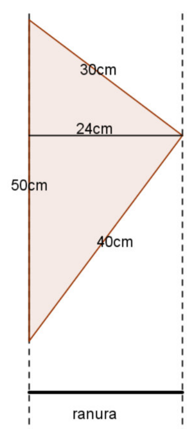


Problema 3: Una placa triangular cuyos lados miden *30cm*, *40cm* y *50cm* respectivamente, y de *1* milímetro de espesor, ¿puede pasar por una ranura con forma de segmento, de poco más que *1* milímetro de espesor y poco más que *24cm* de largo?

Solución: Por las medidas de los lados del triángulo, se deduce que se trata de un triángulo rectángulo. Su área es:

$$(30\times 40):2 = (50\times h):2$$

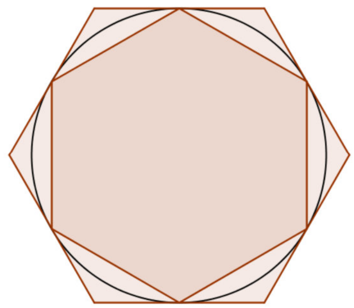
donde h = 24cm es la altura del triángulo correspondiente a la hipotenusa. La siguiente figura, muestra cómo es posible pasar la placa por la ranura.



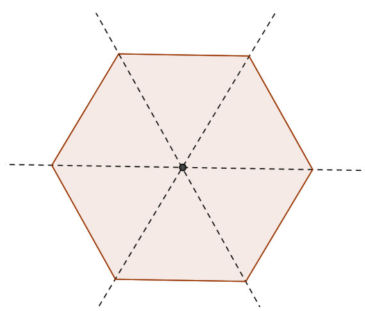
TORNEOS GEOMÉTRICOS 2014

Soluciones - Tercer Nivel

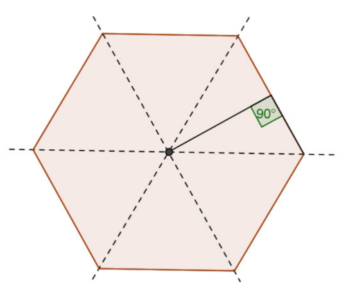
Problema 1: El hexágono cuyos vértices son los puntos medios de los lados de un hexágono regular dado, tiene *12cm* de perímetro. Halla el área del círculo inscripto al hexágono dado.



Solución: Notemos primero que el centro de la circunferencia inscripta a un hexágono, coincide con el centro del hexágono, por ser la intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del hexágono:

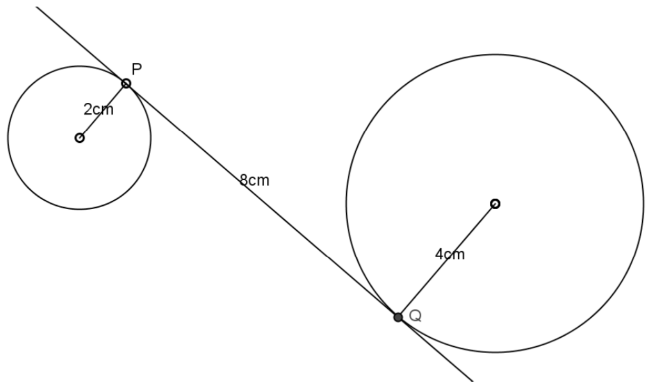


De manera que la circunferencia inscripta es tangente a los lados del hexágono en los puntos medios de los mismos.

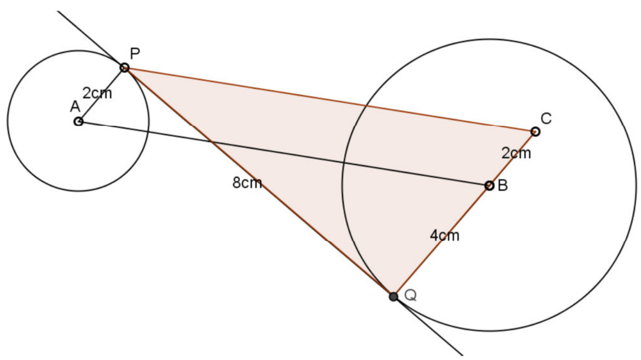


Es decir, el hexágono cuyos vértices son los puntos medios de los lados, queda inscripto en esta circunferencia y en consecuencia, el radio de la circunferencia es igual al lado de este hexágono, esto es *2cm.* Resulta el área de la circunferencia igual a $4\pi\ cm^2$.

Problema 2: Halla la distancia entre los centros de las circunferencias de radios *4cm* y *2cm* cuyo segmento de tangente común *PQ* mide *8cm*.



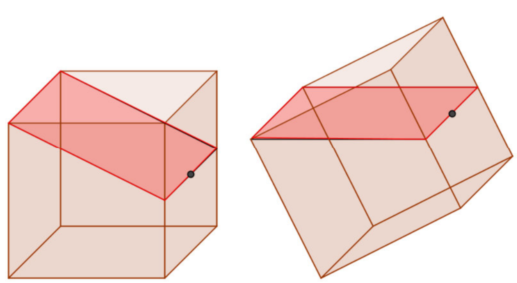
Solución: Si *A* y *B* son los centros de las circunferencias, los segmentos *AP* y *BQ* son paralelos, porque ambos son perpendiculares a la tangente común. Si construimos el paralelogramo *ABCP*, que muestra la figura:



queda formado el triángulo rectángulo *PQC* cuyos catetos miden *8cm* y *6cm* respectivamente. La distancia entre los centros de la circunferencia es igual a la medida de la hipotenusa del triángulo *PQC*; por teorema de Pitágoras, ésta es igual a *10cm* .

Problema 3: Una recipiente con forma de cubo tiene capacidad para *1* litro de leche, pero la caja tiene una pinchadura justo en el centro de una cara lateral. ¿Es posible sostener este recipiente en una posición que le permita contener 3/4 litros de leche?

Solución: La siguiente figura ilustra la posición del recipiente donde la sección, con el plano que contiene al punto de pinchadura y una arista en la cara opuesta, queda horizontal.

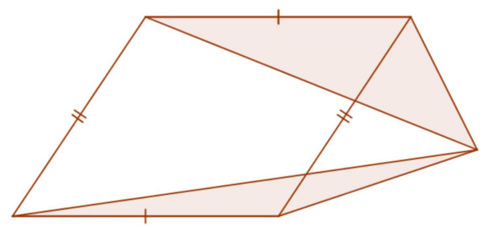


Es claro que la parte del recipiente que está por encima de la sección, tiene 1/4 litro de capacidad.

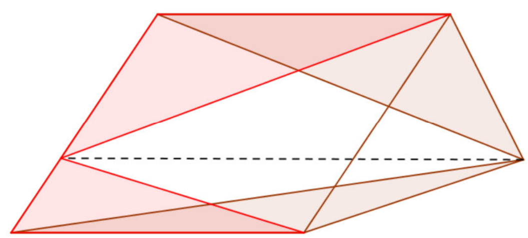
TORNEOS GEOMÉTRICOS 2014

Soluciones - Cuarto Nivel

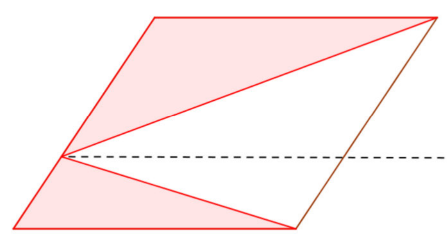
Problema 1: Halla el área de la región sombreada sabiendo que el área del paralelogramo es *12cm²*.



Solución: La figura se forma con dos triángulos con un vértice común y los lados opuestos a este vértice son paralelos. Si desplazamos este vértice común sobre una paralela a los lados del paralelogramo, como se indica en la figura:

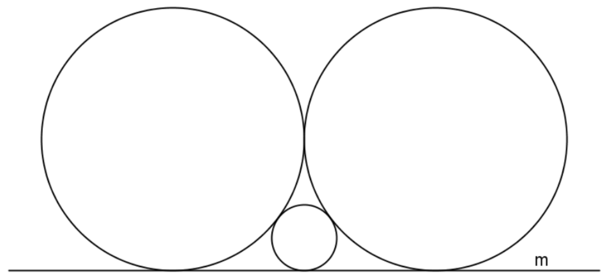


se forma una nueva figura con la misma área que la figura inicial. La línea punteada, paralela a los lados de paralelogramo,

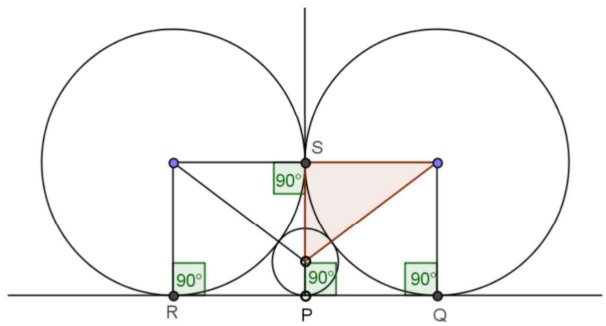


pone en evidencia que la región sombreada tiene la misma área que la región no sombreada del paralelogramo, en consecuencia, el área buscada es *6cm²*.

Problema 2: En un mismo lado de una recta *m*, hay *3* circunferencias, dos de ellas iguales entre sí. Como indica la figura, cada una de ellas es tangente a las otras dos y a la recta *m*. Si la circunferencia menor tiene radio *3*, ¿cuál es el radio de las otras?



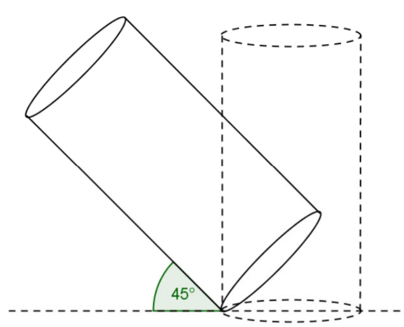
Solución: En la figura:



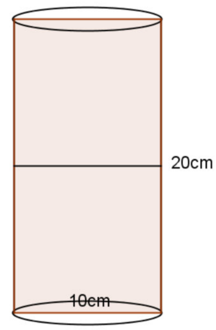
los segmentos *PR*, *PQ* y *PS* son iguales, por tratarse de segmentos de tangentes por el punto *P* a una circunferencia.

Si *r* denota el radio común de las circunferencias grandes, se destaca un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $r+3$, y los catetos *r* y $r-3$ respectivamente. Por el teorema de Pitágoras se tiene $(r+3)^2= r^2+(r-3)^2$, de donde $r^2=12r$ y por lo tanto, $r=12$.

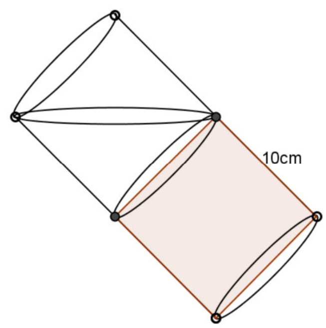
Problema 3: Un cilindro de *20 cm* de altura y base circular de *10 cm* de diámetro está lleno de agua. Si se inclina *45º* respecto de la horizontal. ¿Qué parte del total del agua se ha derramado?



Solución: Una sección del cilindro con un plano vertical es un rectángulo cuyos lados miden *10cm* y *20cm* respectivamente, que puede verse como dos cuadrados unidos por un lado.



Al inclinar el cilindro 45º, se derramará el agua que quede sobre la sección horizontal marcada en la figura,



pero esto es la mitad de medio cilindro, es decir un cuarto del total.