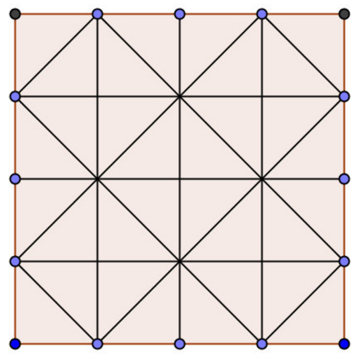
Primer Nivel

Problema 1- Los lados de un cuadrado de área *24cm*^{2} se han dividido en cuatro partes iguales. Halla el área del cuadrado sombreado.

Solución: Trazando los segmentos adicionales indicados en la figura:



El cuadrado queda descompuesto en *32* triángulos rectángulos iguales. El cuadrado sombreado se compone con *4* de éstos triángulos, en consecuencia su área es $\frac{24cm^2}{32}\times 4 = 3cm^2$.

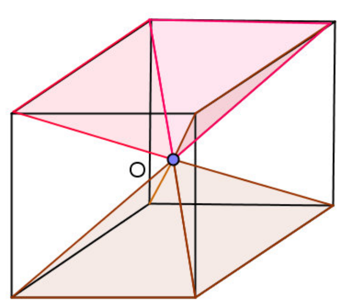
Problema 2- Se desea sembrar césped en un jardín triangular cuyos lados miden *3m*, *4m* y *5m*, ¿Cuántas bolsas de semillas serán necesarias si con cada bolsa se cubren *2m*^{2}?

Solución: Por los valores de los lados del triángulo, éste debe ser un triángulo rectángulo, y en consecuencia su área es $\frac{1}{2}(3m\times 4m) = 6m^2$ Ahora es claro que con 3 bolsas de semillas se cubrirá toda la superficie del jardín.

Problema 3- Con los vértices de una cara de un cubo de *12cm*^{3} de volumen y el centro *O* del cubo, se forma una pirámide como ilustra la figura.

Aclaración: El centro del cubo es el punto de intersección de las diagonales interiores.

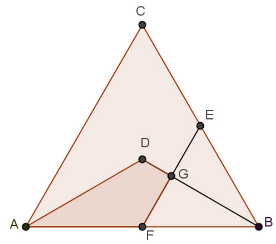
Solución: Sobre las caras restantes del cubo se pueden formar pirámides idénticas,



quedando el cubo descompuesto en seis pirámides, de modo que el volumen de cada pirámide debe ser *2cm*^{3}.

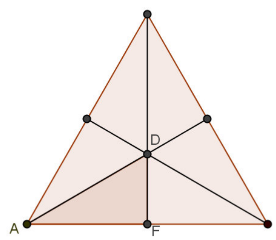
Segundo Nivel

Problema 1- El triángulo *ABC* es equilátero de $24cm^2$ de área. *E* y *F* son los puntos medios de los lados *BC* y *AB* respectivamente. *D* es el punto de intersección de las alturas de *ABC*.

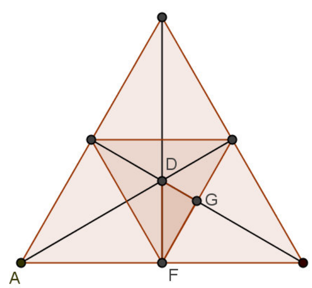


¿Cuál es el área del cuadrilátero sombreado *AFGD*?

Solución: En un triángulo equilátero las alturas están sobre las bisectrices correspondientes, en consecuencia dividen al triángulo en seis triángulos idénticos.



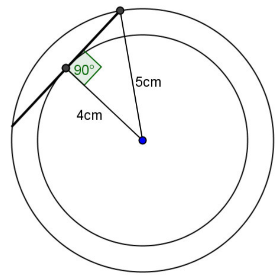
De modo que el área de *AFD* es $\frac{24cm^2}{6} = 4cm^2$. Otro tanto ocurre con el triángulo de puntos medios del triángulo *ABC*



El área de *FGD* es $\frac{1}{6} \times \frac{24cm^2}{4} = 1cm^2$. El área del cuadrilátero *AFGD* es igual a la suma de las áreas de los triángulos *AFD* y *FGD*, es decir $4cm^2 + 1cm^2 = 5cm^2$.

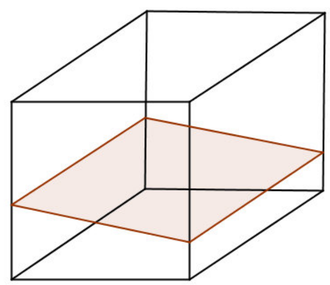
Problema 2- Las circunferencias concéntricas *C* y *C'* tienen radios de 5cm y 4cm.respectivamente. Determina la longitud de una cuerda de *C* que sea tangente a *C'*.

Solución: Dado que la tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia, se tiene la situación que ilustra la figura.



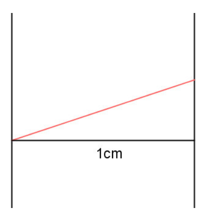
Usando Pitágoras, la mitad de la cuerda mide $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. Luego la cuerda mide *6cm*.

Problema 3- Un cuadrilátero tiene sus vértices en cuatro aristas paralelas de un cubo de arista *1cm*, como indica la figura



Muestra que el perímetro del cuadrilátero es mayor o igual que *4cm*.

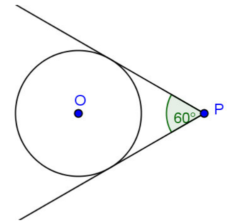
Solución: Cada arista del cuadrilátero tiene sus extremos en rectas paralelas separadas por *1cm* de distancia



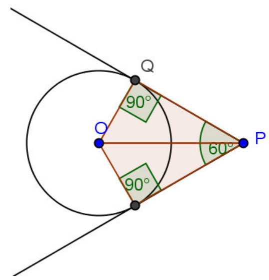
Esto indica que las longitudes de las aristas son mayores o iguales que *1cm*, y en consecuencia, el perímetro es mayor o igual que *4cm*.

Tercer Nivel

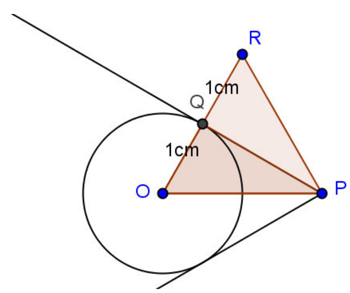
Problema 1- Desde un punto *P* las tangentes a una circunferencia de radio *1*, forman un ángulo de *60º*. Determina la distancia entre *P* y el centro *O* de la circunferencia.



Solución: Los triángulos indicados en la figura son iguales

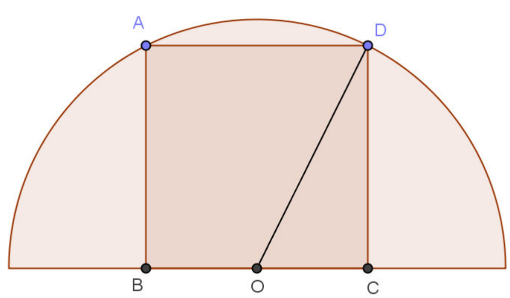


Los ángulos del triángulo *OPQ* son *60º,30º* y *90º* respectivamente.



El triángulo *OPQ* puede ampliarse al triángulo equilátero *OPR*, luego *OP = 2cm*.

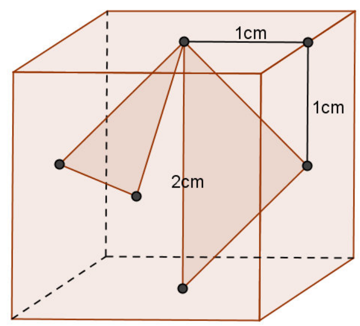
Problema 2- El cuadrado *ABCD* está inscripto en un semicírculo de radio 5cm- ¿Cuál es el área del cuadrado?



Solución: El punto medio *O* del lado *BC* del cuadrado, se encuentra en la mediatriz de *BC*, luego debe coincidir con el punto medio del diámetro que limita al semicírculo. Aplicando Pitágoras al triángulo *OCD*, si *l* denota el lado del cuadrado, se verifica : $5^2 = l^2 + (\frac{l}{2})^2 = \frac{5}{4}l^2$, es decir $l^2 = 20$, de modo que el área buscada es 20 cm^2.

Problema 3- Con vértices en los centros de las caras de un cubo de *2cm* de arista, se formó un triángulo. ¿Qué valores puede tomar el perímetro de este triángulo?

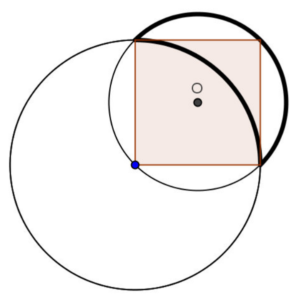
Solución: Entre dos centros de caras, la distancia es $\sqrt{2}cm$ si los centros corresponden a caras vecinas, o bien *2cm* si los centros están en caras opuestas. La justificación de esta afirmación, en ambos casos, surge de la figura



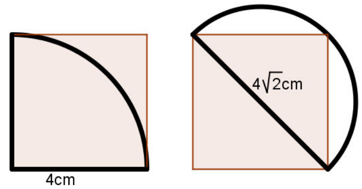
Luego los perímetros posibles son $3\sqrt{2}cm$ y $\left(2+2\sqrt{2}\right)cm$.

Cuarto Nivel

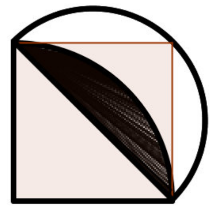
Problema 1- El cuadrado con centro *O* tiene área 16cm^2. Calcula el área de la lúnula cuyos bordes se destacan en la figura.



Solución: El lado del cuadrado mide *4cm* y su diagonal mide $4\sqrt{2}cm$. Las áreas de los sectores indicados a continuación:



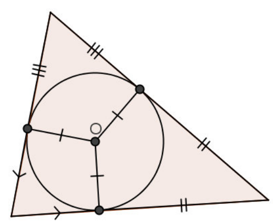
son respectivamente $\frac{\pi \times 4^2}{4} = 4\pi$ y $\frac{\pi \times \left(2\sqrt{2}\right)^2}{2} = 4\pi$. Superponemos estas figuras de igual área de modo que los cuadrados coincidan y sombreamos en la figura la superficie común.



Se obtiene que el área de la lúnula es igual al área del triángulo rectángulo, que es la mitad del cuadrado. En conclusión el área de la lúnula es $8cm^2$.

Problema 2- Usando regla y compás, indica cómo es posible descomponer un triángulo en tres romboides inscriptibles.

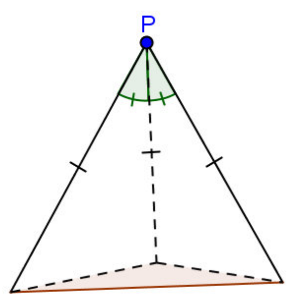
Solución: Sea *O* es el centro de la circunferencia inscripta al triángulo, es decir el punto de intersección de las bisectrices. La figura muestra la descomposición en tres romboides si se tiene en cuenta la igualdad de los segmentos tangentes a una circunferencia desde un punto exterior.



Por otra parte, los ángulos en los puntos de tangencia son rectos, luego en cada romboide hay dos ángulos opuestos que suman *180º* y por lo tanto los romboides son inscriptibles.

Problema 3- En el vértice *P* de un tetraedro concurren tres aristas de igual longitud y dos a dos de estas aristas forman ángulos de igual valor. ¿Cuánto miden los ángulos de la cara opuesta a este vértice?

Solución: Por los datos del problema, las tres caras que concurren en el vértice *P*, son iguales por tener dos lados y el ángulo comprendido iguales.



En consecuencia, las tres aristas de la cara opuesta a *P* son iguales, es decir esta cara es un triángulo equilátero y por lo tanto sus ángulos miden *60º*.