Año IV - Número 5 - Marzo 2018

NOTAS DE GEOMETRÍA

Redactadas por los Doctores José Araujo, Guillermo Keilhauer y la Lic. Norma Pietrocola

TORNEO DE LAS CUENCAS

5

QUINTA NOTA

Cuerpos redondos

Cuerpos de revolución. Cilindro, cono, esfera, casquete esférico. Área y volumen.

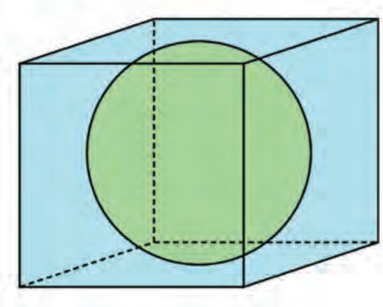
Problema 1 Un tanque cilíndrico tiene 500 litros de capacidad y su radio es 50cm. ¿Cuál es la altura del tanque?

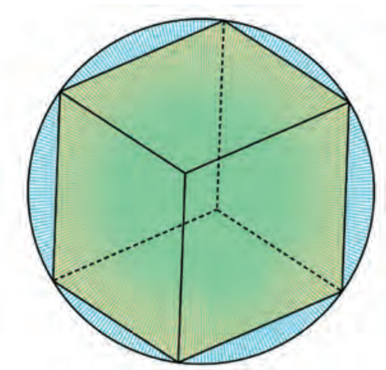
Solución

El volumen del cilindro es $\left(\pi \times 50^2 \times h\right)\mathrm{cm}^3$, donde h es la altura del tanque. Dado que 500 litros equivalen a 500.000cm³, resulta:

$$h = \frac{500.000}{\pi \times 2.500}\mathrm{cm} = \frac{200}{\pi}\mathrm{cm} = 63{,}662\mathrm{cm}$$

Problema 2 Una esfera de radio 1cm se inscribe en un cubo, el cubo se inscribe en una esfera. Hallar el radio de esta esfera.





Solución

La esfera inscripta en un cubo es la que tiene centro en el centro del cubo y radio igual a media arista del cubo. La esfera circunscripta a un cubo es la que tiene centro en el centro del cubo y radio igual a media diagonal interior del cubo.

En consecuencia, el cubo tiene sus aristas de 2cm, de modo que su diagonal interior mide $2\sqrt{3}$ cm y el radio de la esfera circunscripta es $\sqrt{3}$cm.

Problema 3 De un cilindro de madera de base circular de 2cm de radio y 4cm de altura, se va a tornear una esfera de radio 2cm. ¿Qué volumen de madera se quitará?

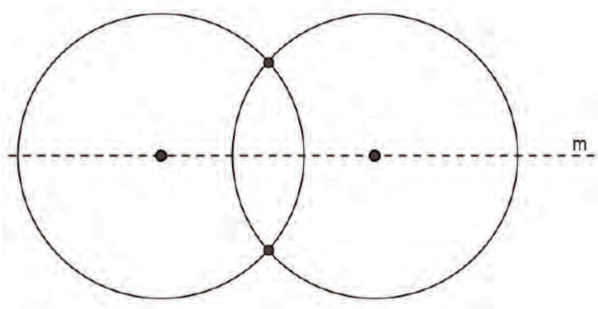
Solución

El volumen del cilindro es $4\pi \times 2^2 \text{cm}^3 = 16\pi \text{cm}^3$ y el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi \times 2^3 \text{cm}^3 = \frac{32}{3}\pi \text{cm}^3$, es decir, se quitará $\frac{2}{3}\pi \times 2^3 \text{cm}^3 = \frac{16}{3}\pi \text{cm}^3$ de madera.

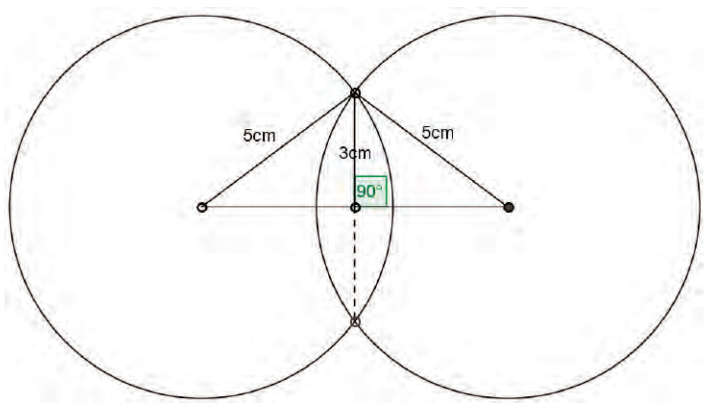
Problema 4 Dos esferas de radio 5cm se cortan en una circunferencia de radio 3cm. ¿Cuál es la distancia entre sus centros?

Solución

Consideremos dos circunferencias de igual radio que se cortan:

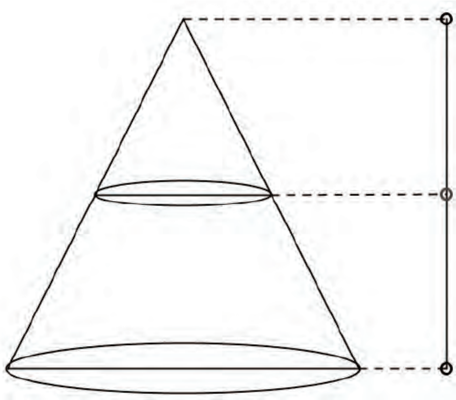


Si se rotan ambas circunferencias, en un giro completo, alrededor de la recta *m* que une los centros de dichas circunferencias, se obtienen dos esferas. Los puntos en la intersección de estas circunferencias rotan describiendo una circunferencia que es, precisamente, la intersección de las esferas. Además, estos puntos son los extremos de un diámetro de la circunferencia intersección de las esferas. La situación del problema se ajusta a la siguiente figura:



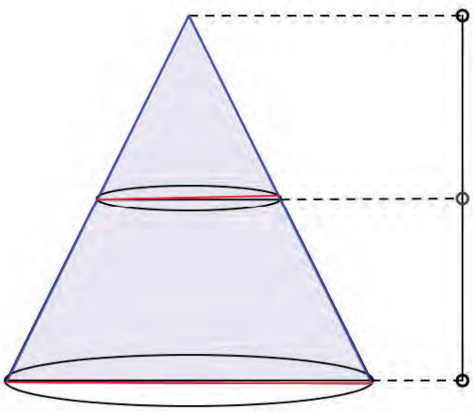
Usando Pitágoras, podemos ver que la distancia entre los centros es 8cm.

Problema 5 Se secciona un cono a media altura con un plano paralelo a la base. ¿Qué proporción guardan los volúmenes de las partes?



Solución

El cono se descompone en un conito en la parte superior y un tronco de cono en la parte inferior, ambos con la misma altura. La altura del conito mide la mitad de la altura del cono, el diámetro de su base mide la mitad del diámetro de la base del cono. La última afirmación se justifica teniendo en cuenta la sección triangular del cono obtenida con un plano que contenga al eje del cono.



En la figura se observa que el diámetro de la base del conito es la base media de la sección triangular.

Comparando los volúmenes del cono y del conito, que son respectivamente $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ y $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2\frac{h}{2}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$, se desprende que, en relación con el volumen del cono, el volumen del conito es 1/8 y por lo tanto el volumen del tronco es 7/8. Luego, la proporción buscada entre los volúmenes es 7:1.

Problema 6 Un cono *C* de 54cm³ de volumen y 72cm² de área se secciona con un plano paralelo a la base, a 2/3 de su altura. Hallar área y volumen del cono sobre la sección.

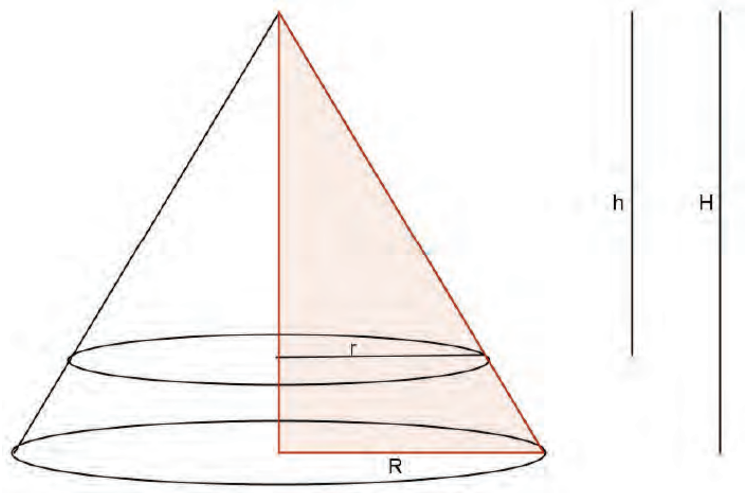
Solución

En forma análoga al Problema 5, el cono en la parte superior tiene el radio de su base y su generatriz respectivamente iguales a 1/3 del radio de la base y a 1/3 de la generatriz del cono *C*. De las fórmulas de volumen y área de un cono, resulta que el cono en la parte superior tiene su volumen igual a 1/27 del volumen de *C* y su área igual a 1/9 del área de *C*, esto es 2cm³ y 8cm² respectivamente.

Problema 7 ¿A qué altura debe seccionarse un cono, de 10cm de altura, con un plano paralelo a su base para obtener dos cuerpos de igual volumen?

Solución

Indiquemos con H y R, respectivamente, las medidas de la altura y del radio de la base del cono. Supongamos que tenemos la sección buscada y nombremos con h y r a las medidas de la altura y del radio de la base del cono sobre la sección.



Se observa que tanto H y R como h y r son catetos de triángulos rectángulos semejantes, es decir, $R/r = H/h$. De la condición $2 \times \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ y teniendo en cuenta que $\frac{H}{h} = \frac{R}{r}$, resulta:

$$2 = \frac{R^2 H}{r^2 h} = \frac{H^3}{h^3}$$

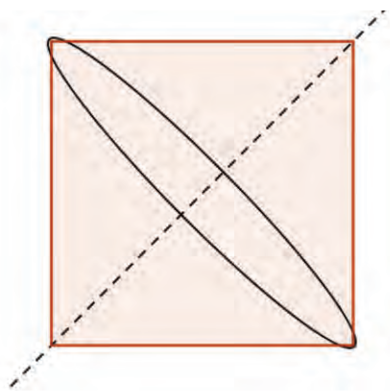
De modo que $\frac{H}{h} = \sqrt[3]{2}$. Dado que $H = 10$cm, se obtiene:

$$H - h = 10 - \frac{10}{\sqrt[3]{2}} = 10\left(\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}}\right).$$

Problema 8 Se hace rotar un cuadrado de 2cm de lado alrededor de una de sus diagonales. ¿Qué área y volumen tiene el cuerpo obtenido?

Solución

Se obtiene un bicono, es decir, dos conos unidos por una base común.



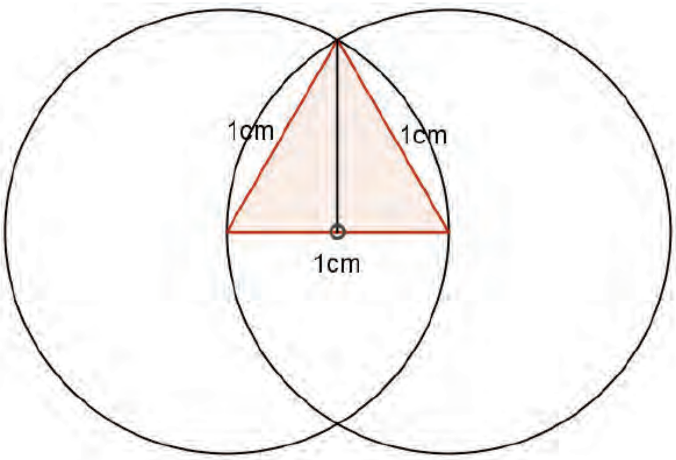
En este caso, ambos conos son iguales, el radio de la base es media diagonal del cuadrado y la generatriz es un lado del cuadrado, en consecuencia el volumen es $\frac{2}{3}\pi\sqrt{2}^2 \times \sqrt{2}\text{cm}^3 = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi\text{cm}^3$ y el área es de $4\sqrt{2}\pi\text{cm}^2$.

Problema 9

Dos esferas de radio 1cm pasan una por el centro de la otra. Hallar el área del círculo limitado por la circunferencia obtenida como intersección de las esferas.

Solución

Los centros de las esferas y un punto en la intersección de ambas son los vértices de un triángulo equilátero de 1cm de lado, siendo la altura de este triángulo el radio de la circunferencia, intersección de ambas esferas.



El radio de la circunferencia es $\frac{\sqrt{3}}{2}$cm, de manera que el área del círculo es $\frac{3}{4}\pi\,\text{cm}^2$.

Problema 10

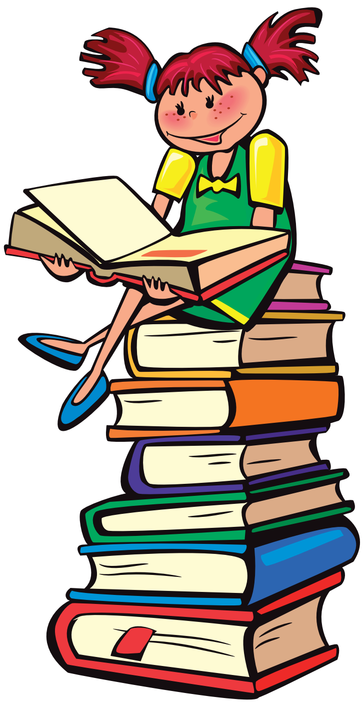
¿Cuáles son el volumen y el área lateral de un cono que tiene por vértice a un vértice *P* de un cubo, de 1cm de arista, y por base al círculo cuya circunferencia pasa por otros tres vértices del cubo?

Solución

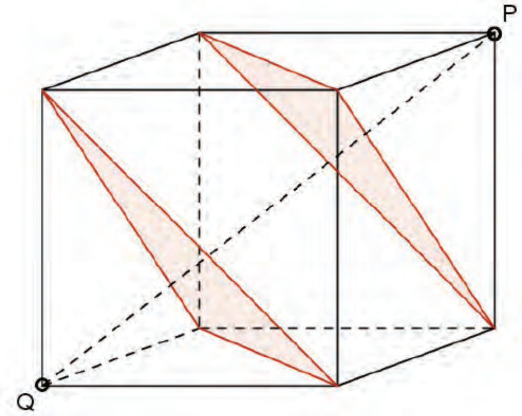
En principio, es conveniente observar lo siguiente:

- *El eje de un cono es perpendicular al plano de la base y pasa por el centro de la base.*
- *Los puntos de la circunferencia base de un cono equidistan del vértice.*
- *Si un punto equidista de tres puntos de la circunferencia base de un cono, entonces está en el eje de dicho cono.*

Para la última afirmación, tener en cuenta que el eje de un cono puede ser obtenido como la intersección de dos planos bisectores de pares de puntos de la circunferencia base.



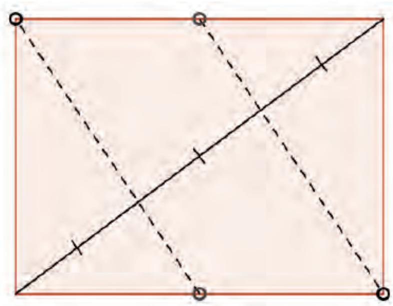
Como los vértices del cubo que están en la base del cono deben equidistar de P, hay sólo dos situaciones. Las bases son los círculos limitados por las circunferencias circunscriptas a los triángulos equiláteros dados en la figura:



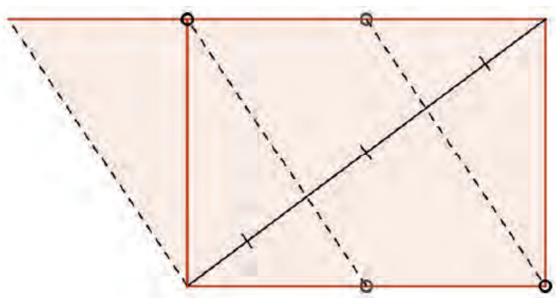
Los vértices P y Q, indicados en la figura, equidistan de los vértices de cada triángulo, luego el eje de ambos conos está sobre la diagonal interior PQ del cubo. En un caso la generatriz del cono mide 1cm, igual que una arista, y en el otro caso mide $\sqrt{2}$cm, como una diagonal de una cara del cubo.

Por otra parte, como los triángulos son equiláteros de lado $\sqrt{2}$cm, el radio de la circunferencia circunscripta es de $\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{3}$cm. Finalmente, las alturas son $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm y $2\frac{\sqrt{3}}{3}$cm. Para ver esto, observemos primero lo siguiente:

Los segmentos que, en el interior de un rectángulo, unen vértices opuestos con puntos medios de lados paralelos descomponen a una diagonal en tres segmentos de igual medida.

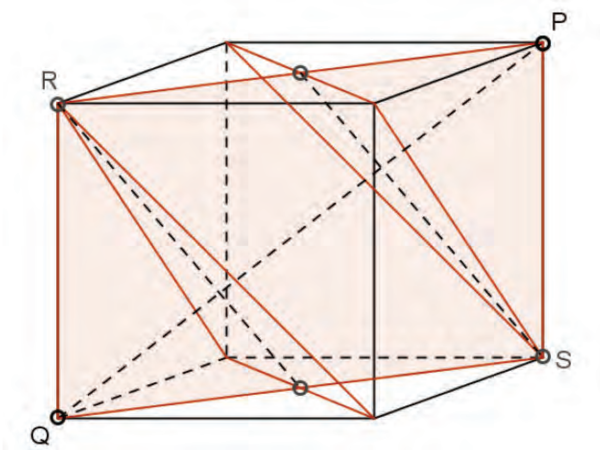


Esta afirmación puede justificarse agregando un triángulo al rectángulo, como ilustra la figura:



donde los segmentos punteados son paralelos e iguales; luego, la afirmación es consecuencia del Teorema de Thales.

Volviendo a nuestro problema, la situación precedente se da en el rectángulo *PRQS* indicado en la figura:



Con los datos encontrados, los volúmenes son:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{3}\pi=\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}\right)^2\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi=\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi$$

y las áreas laterales son:

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}\pi=\frac{\sqrt{6}}{3}\pi$$

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}\sqrt{2}\pi=2\frac{\sqrt{6}}{3}\pi$$

Problema 11 Una caja cilíndrica, cuya base es de radio *r* y cuya altura es 2*r*, tiene en su interior una esfera de radio *r*. Se agrega agua a la caja justo hasta cubrir la esfera y luego se la retira. ¿A qué altura queda el nivel de agua en la caja?

Solución

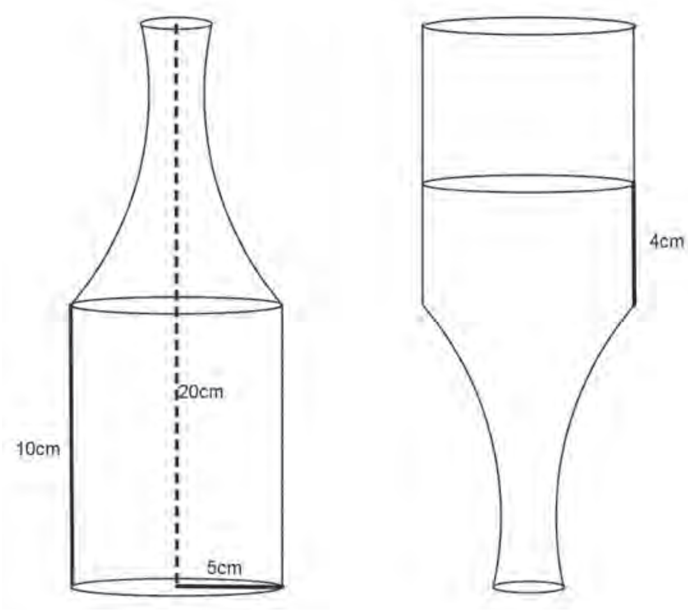
El volumen del cilindro es $2\pi r^3$ y el volumen de la esfera es $4/3\pi r^3$, luego el volumen del agua es $2/3\pi r^3$. En consecuencia, el nivel del agua queda a $2/3r$.

Problema 12 A una varilla circular de acero que tiene $\sqrt{3}$cm de diámetro, se le saca punta de 60° en el vértice, según indica una sección de la figura. ¿Cuánto material se quitó?

Solución

El volumen del material extraído es el volumen del cilindro cuya sección es *BCED* menos el volumen del cono cuya sección es *ABC*, esto es 2/3 del volumen de dicho cilindro. El radio del cilindro es $\frac{\sqrt{3}}{2}$cm y la altura $\frac{3}{2}$cm, de modo que siendo el volumen del cilindro $\frac{9}{8}\pi\text{cm}^3$ resulta que el volumen del material extraído es $\frac{3}{4}\pi\text{cm}^3$.

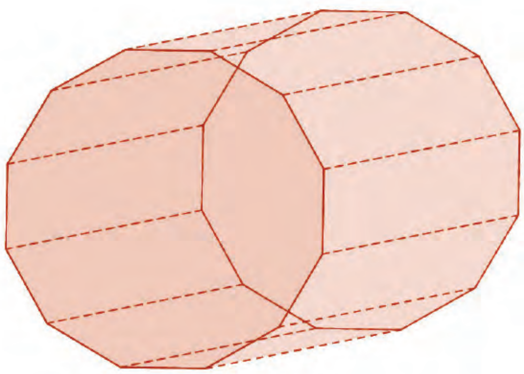
Problema 13 La mitad inferior de una botella, de 20cm de altura, es de forma cilíndrica de 5cm de radio. El nivel de un líquido en la botella alcanza la mitad de la altura. Si se invierte la botella, el nivel del líquido quedará 4cm más alto que antes. ¿Qué capacidad tiene la botella?



Solución

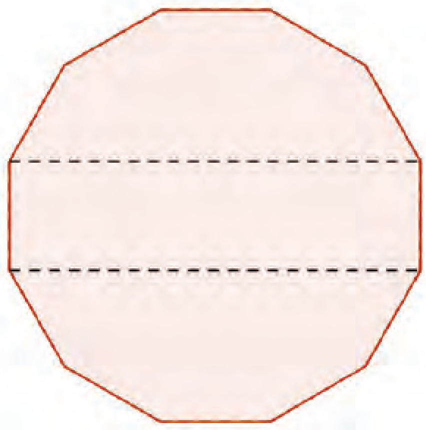
La botella tiene $10\pi 5^2\text{cm}^3$ de líquido. Si se invierte, el líquido sobre la parte cilíndrica de 10cm sólo ocupará 4cm, es decir que la parte no cilíndrica se completa con $(10\pi 5^2 - 4\pi 5^2)\,\text{cm}^3 = 6\pi 5^2\text{cm}^3$. De modo que la capacidad de la botella es de $10\pi 5^2\text{cm}^3 + 6\pi 5^2\text{cm}^3 = 16\pi 5^2\text{cm}^3 = 400\pi\text{cm}^3$.

Problema 14 Un tanque con forma de prisma cuya base es un dodecágono regular está apoyado en el piso sobre una de sus caras laterales. Indicar hasta dónde llegará el nivel de agua si se cargara un tercio de su capacidad.

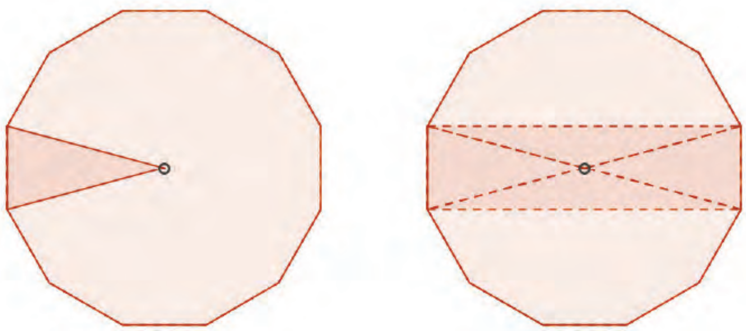


Solución

En un dodecágono regular, los segmentos indicados en la figura

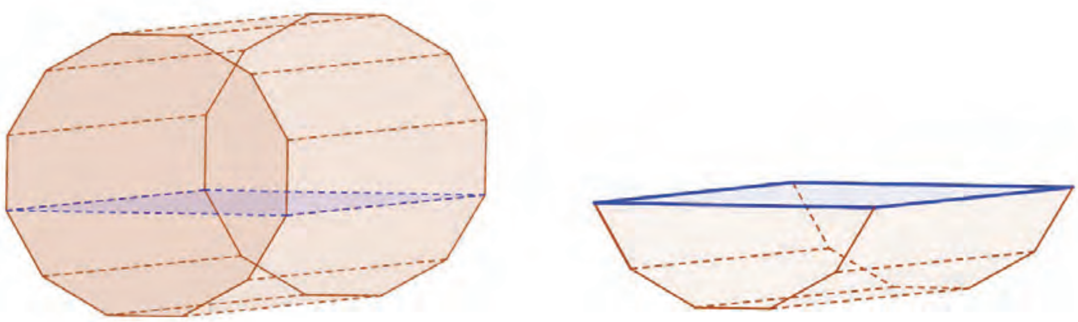


descomponen al dodecágono en tres polígonos de igual área. Como los polígonos en la parte superior e inferior son iguales, bastará ver que el rectángulo tiene $\frac{1}{3}$ del área del dodecágono. El área del dodecágono es 12 veces el área de un triángulo que tenga un vértice en el centro del dodecágono y un lado igual a una arista del dodecágono. Por otra parte, las diagonales de un rectángulo lo descomponen en cuatro triángulos de igual área.



Resulta entonces que el área del rectángulo, indicado en la figura precedente, es un $\frac{1}{3}$ del área del dodecágono.

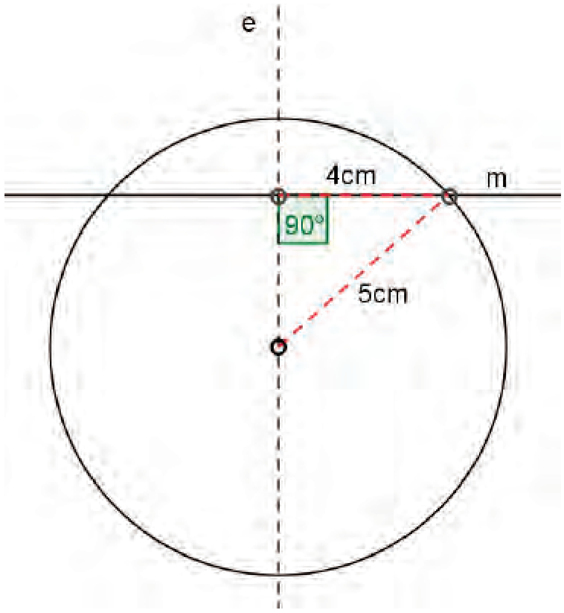
Teniendo en cuenta que el volumen de un prisma es área de la base por altura, el nivel de agua se dará como se detalla en la situación siguiente.



Problema 15 Un plano secciona a una esfera de radio 5cm en un circunferencia de radio 4cm. ¿Cuál es la distancia del centro de la esfera al plano? ¿Qué volúmenes y qué áreas tienen los casquetes de la esfera en los que el plano la divide?

Solución

El plano y la esfera se pueden pensar como las superficies obtenidas al hacer girar una recta y una circunferencia alrededor de un eje *e* que pase por el centro de la circunferencia y que sea perpendicular a la recta *m*, tal como lo muestra la siguiente figura:



Ahora es claro que la distancia desde el centro de la esfera al plano es 3cm. El área y el volumen del casquete esférico en la parte superior son respectivamente:

$$(2\pi\times5\times2)\text{cm}^2 = 20\pi\text{cm}^2 \text{ y } \frac{2\pi}{3}(3\times5-2)\text{cm}^3 = \frac{26\pi}{3}\text{cm}^3$$

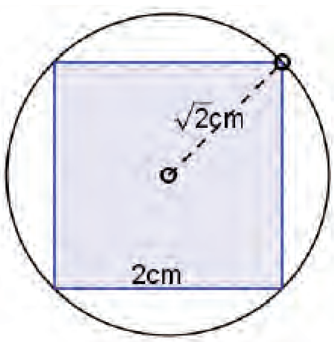
Por diferencias se puede obtener el área y el volumen del casquete en la parte inferior, esto es:

$$\left(4\pi5^2-20\pi\right)\text{cm}^2 = 80\pi\text{cm}^2 \text{ y } \left(\frac{4}{3}\pi5^3-\frac{26}{3}\pi\right)\text{cm}^3 = \frac{474}{3}\pi\text{cm}^3$$

Problema 16 Un cubo está inscripto en una esfera de radio $\sqrt{3}$ cm. ¿Cuál es el área de los círculos en que los planos determinados por las caras del cubo seccionan a la esfera?

Solución

El radio de la esfera es igual a media diagonal interior del cubo. Si *l* es la medida de una arista del cubo, debe ser $2\sqrt{3} = l\sqrt{3}$, o sea que la arista del cubo es de 2cm. El plano determinado por una cara del cubo secciona a la esfera en una circunferencia que contiene los vértices de dicha cara, es decir, es la circunferencia circunscripta al cuadrado:

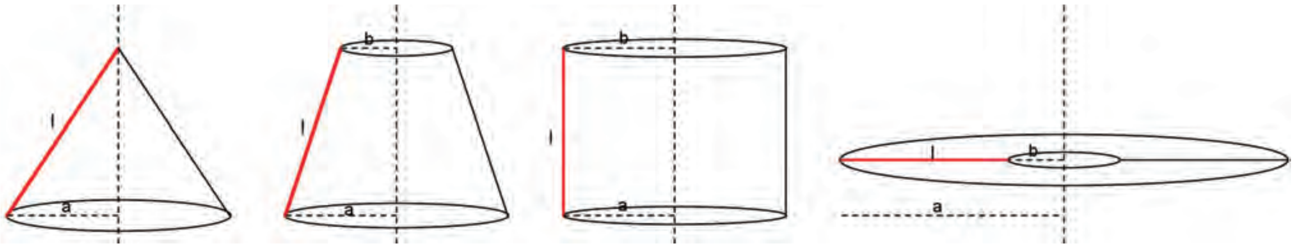


En conclusión, el área del círculo es 2π.

Problema 17 Un segmento de longitud l y una recta están en un mismo plano, y el segmento en uno de los semiplanos que limita la recta. Las distancias de los extremos del segmento a la recta son a y b. ¿Cuál es el área del cuerpo que se obtiene al hacer girar el segmento alrededor de la recta?

Solución

El cuerpo obtenido puede ser un cono, un tronco de cono, un cilindro o una corona en un plano, conforme el segmento sea: no perpendicular a la recta, paralelo a la recta o perpendicular a la recta.

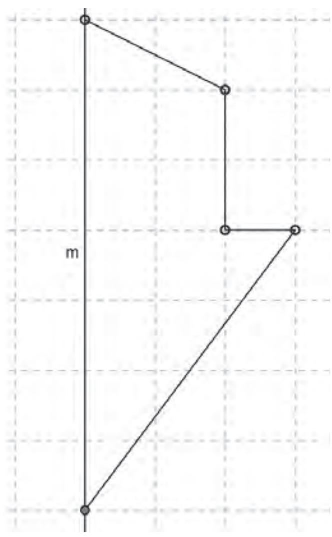


En todos los casos, el área está dada por la expresión:

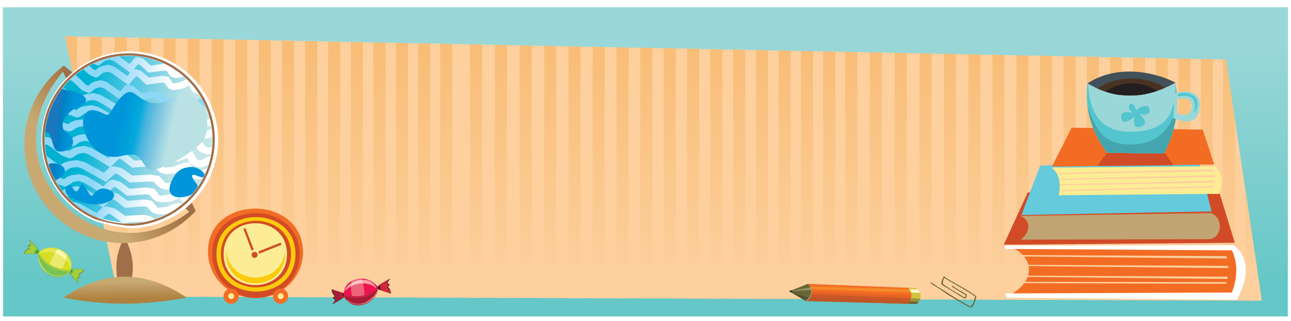
$$\text{Área} = 2l\pi\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Notar que en el cuarto caso es $l = a-b$. La expresión en el segundo miembro de la igualdad precedente se conoce como *Teorema del centroide de Pappus*.

Problema 18 Se hace girar la poligonal de la figura alrededor de la recta m. ¿Qué área tiene el cuerpo obtenido?

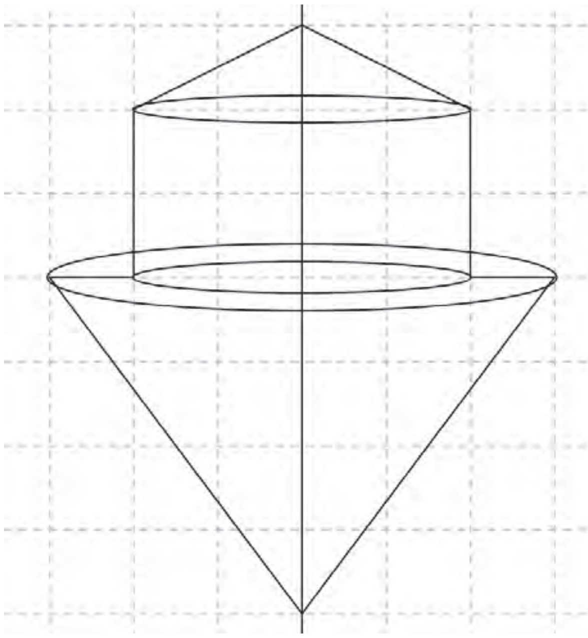


Los cuadrados de la cuadrícula son de 1cm de lado.



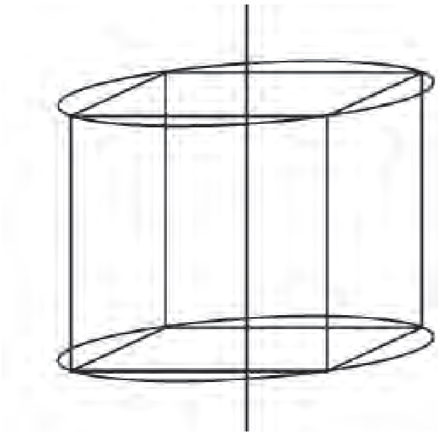
Solución

Descomponemos la superficie en piezas (conos, cilindros, coronas) y usamos el resultado del Problema 17. De arriba hacia abajo se forman: un cono con a=0, b=2 y $l=\sqrt{5}$; un cilindro con a=b=2 y l=2; una corona con a=2, b=3 y l=1; un cono con a=0, b=3 y l=5. El área del cuerpo obtenido es la suma de las áreas laterales de los cuerpos mencionados.



El área es $\left(2\sqrt{5}+4\times2+5\times1+3\times5\right)\pi=\left(28+2\sqrt{5}\right)\pi$.

Problema 19 Un cubo de arista 1cm gira alrededor de una recta que une centros de caras opuestas. ¿Cuáles son el volumen y el área lateral del cilindro obtenido?



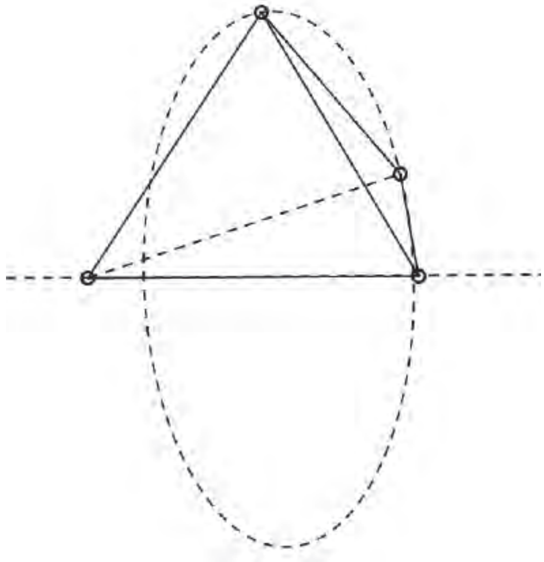
Solución

La altura del cilindro es de 1cm y el radio de la base es de $\frac{\sqrt{2}}{2}$cm, de modo que el volumen es $\left(\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\times1\right)\mathrm{cm}^3=\frac{\pi}{2}\mathrm{cm}^3$ y el área lateral $\pi\sqrt{2}\mathrm{cm}^2$.

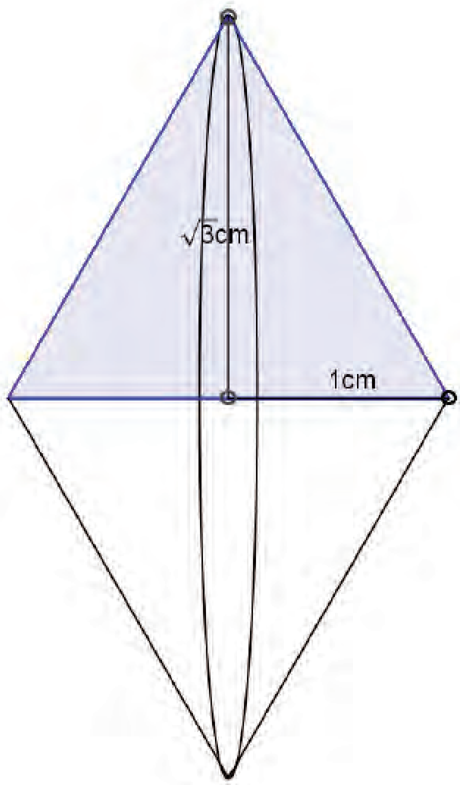
Problema 20 Un tetraedro regular, de 2cm de arista, gira alrededor de una de sus aristas. ¿Qué área y qué volumen tiene el cuerpo obtenido?

Solución

Los puntos que barre el tetraedro, al dar un giro completo alrededor de una arista, son los mismos que barre una de las dos caras que comparten dicha arista.



El cuerpo resultante es el bicono obtenido al hacer girar un triángulo equilátero alrededor de uno de sus lados.

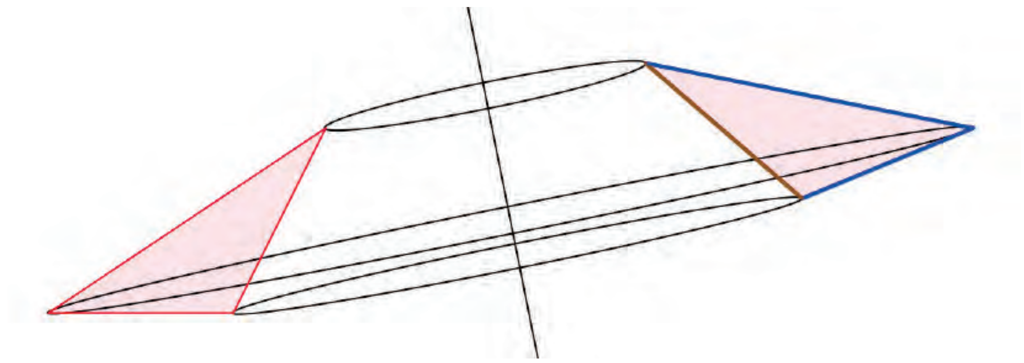


El volumen es $2\pi cm^3$ y el área $4\pi\sqrt{3}cm^2$.

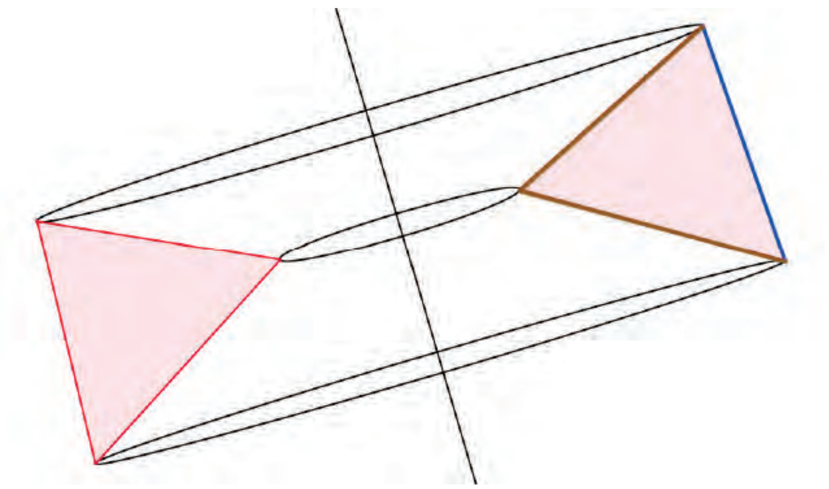
Problema 21 Hallar el volumen del cuerpo obtenido al hacer girar un triángulo de área $1cm^2$, alrededor de una recta en el plano del triángulo, ubicada en el exterior del triángulo a 2cm de distancia de su baricentro.

Solución

La figura ilustra una situación del problema.

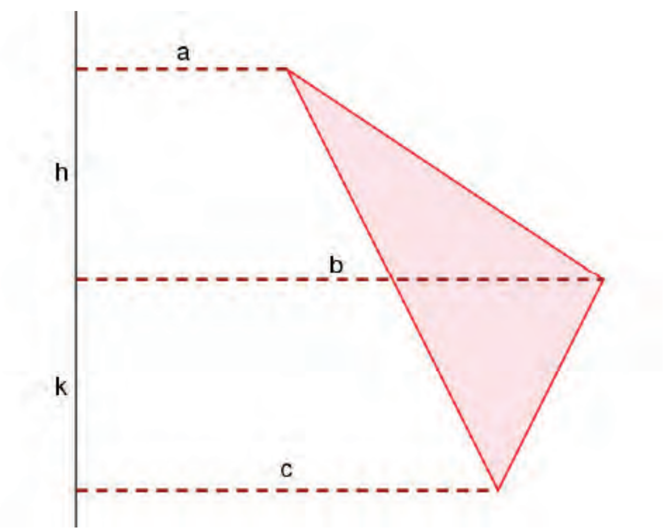


Cada lado del triángulo gira alrededor de la cara lateral de un tronco de cono. El volumen buscado se obtiene como sumas y restas de los volúmenes de estos conos. En el caso de la figura precedente, el volumen es la suma de los volúmenes de los conos cuyas caras laterales se obtienen girando los lados destacados en azul, menos el volumen del cono cuya cara lateral se obtiene girando el lado destacado en marrón. Otra situación se presenta en la siguiente figura:



En este caso, es el volumen del tronco de cono asociado con el lado destacado en azul, menos los volúmenes de los troncos de conos asociados con los lados destacados en marrón.

Teniendo en cuenta la expresión del volumen de un tronco de cono, consideramos las distancias *a*, *b* y *c* desde los vértices del triángulo al eje de rotación, y los segmentos *h* y *k* como indica la figura:



En la situación de esta figura, el volumen buscado es:

$$\frac{h\pi}{3}\left(a^2+b^2+ab\right)+\frac{k\pi}{3}\left(b^2+c^2+bc\right)-\frac{(h+k)\pi}{3}\left(a^2+c^2+ac\right)$$

Esto también puede expresarse como:

$$\frac{\pi}{3}\left(h\left(a^2+ab+b^2\right)+k\left(b^2+bc+c^2\right)-(h+k)\left(a^2+ac+c^2\right)\right)$$

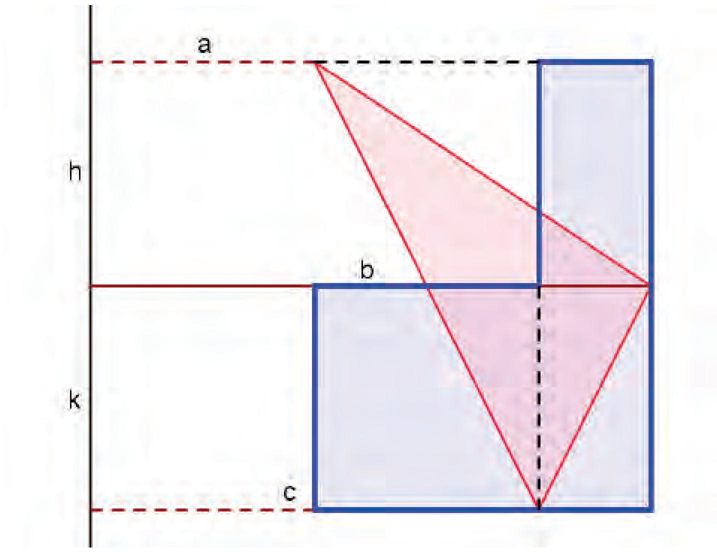
$$=\frac{\pi}{3}\left(hab+hb^2+kb^2+kbc-hac-hc^2-ka^2-kac\right)$$

$$=\frac{\pi}{3}\left(h\left(b^2-c^2\right)+ha(b-c)+k\left(b^2-a^2\right)+kc(b-a)\right)$$

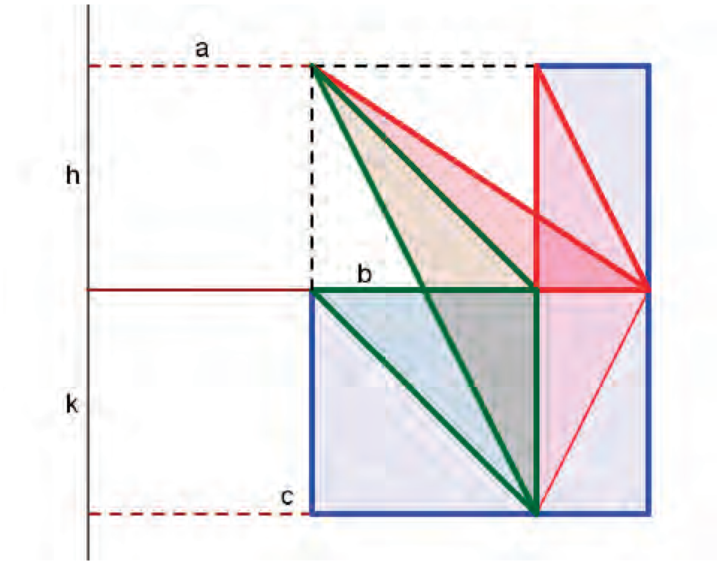
$$=\frac{\pi}{3}\left(h(b-c)(a+b+c)+k(b-a)(a+b+c)\right)$$

$$=\frac{\pi}{3}\left((h+k)b-hc-ka\right)(a+b+c)$$

La expresión $(h+k)b-hc-ka$ está dada por restas de áreas de rectángulos, es decir, es el área del polígono de la figura destacado en azul.

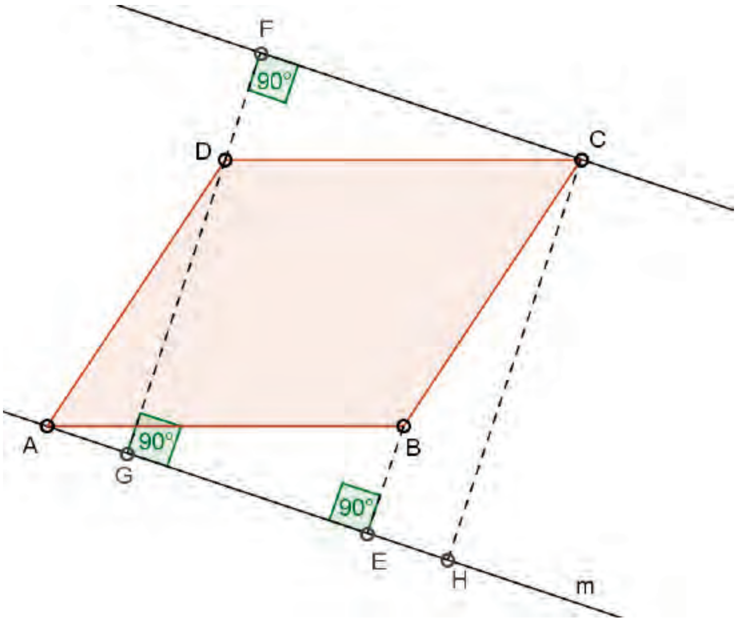


Pero el área de este polígono es el doble del área del triángulo, según puede apreciarse en la siguiente figura.



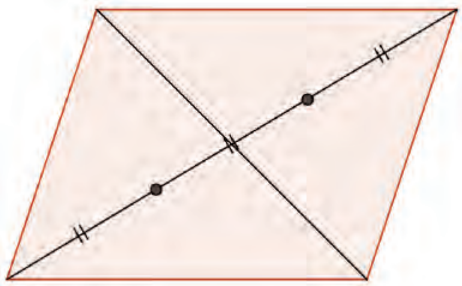
En consecuencia, el volumen buscado es $T\pi 2\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$, donde T es el área del triángulo y $\pi 2\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$ es la longitud de una circunferencia de radio $\frac{a+b+c}{3}$. Para finalizar, veamos que $\frac{a+b+c}{3}$ es la distancia desde el baricentro del triángulo, punto de intersección de las medianas, a la recta eje del cuerpo. Haremos antes un par de observaciones.

Si por el vértice A del paralelogramo ABCD se traza una recta m, entonces la distancia desde el vértice C a m es igual a la suma de las distancias de los vértices B y D a m.

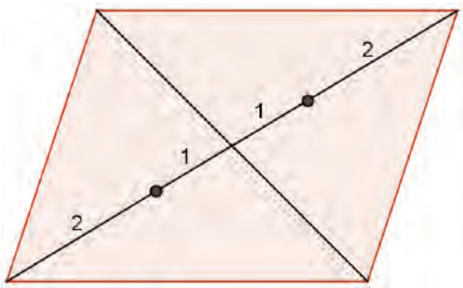


Si trazamos una recta paralela a m por el vértice C, los triángulos rectángulos AEB y CFD de la figura son semejantes, dado que tienen los mismos ángulos, y como además sus hipotenusas son iguales, dichos triángulos son iguales, es decir, $BE = DF$ y la distancia entre las rectas es $CH = GD + DF = GD + BE$.

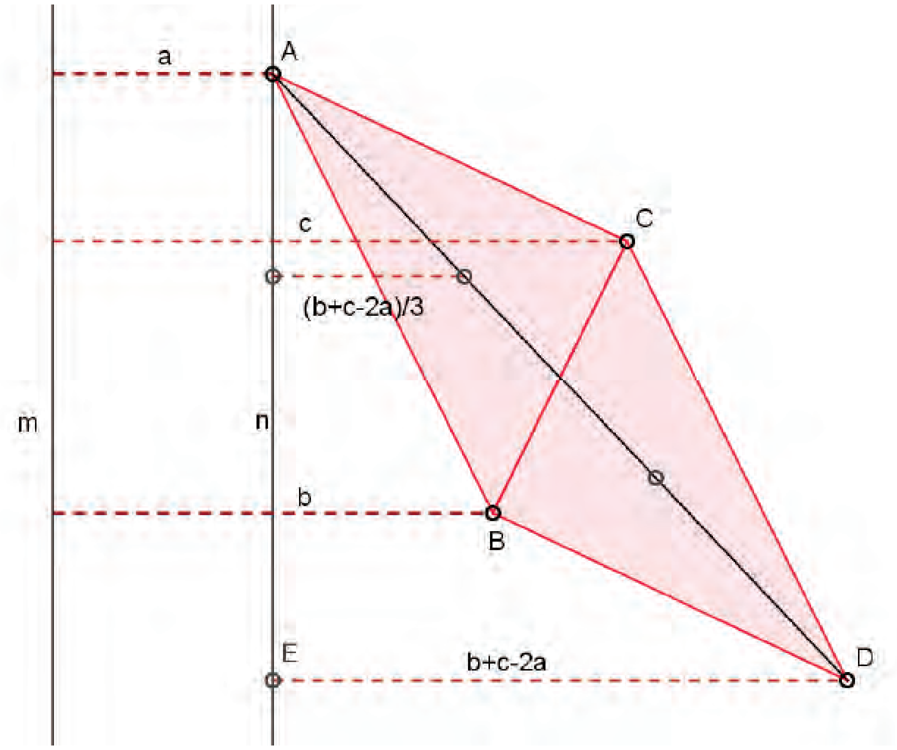
Una diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos, los baricentros de estos triángulos dividen a la otra diagonal del paralelogramo en tres segmentos iguales.



La afirmación precedente se justifica si se tiene en cuenta que los triángulos son iguales y los baricentros dividen a una mediana en la relación 2:1.



Ahora podemos ver que si *a, b, c* son las distancias desde los vértices del triángulo *ABC* a la recta *m*, entonces $\frac{a+b+c}{3}$ es la distancia desde el baricentro de *ABC* a la recta *m*.



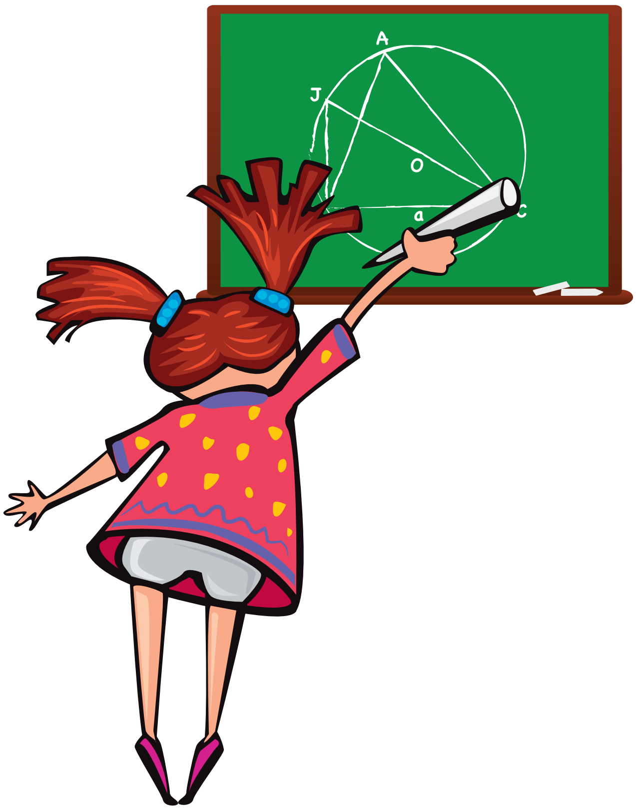
En la figura, *n* es la recta paralela a *m* que pasa por el punto más cercano a *m*, en este caso es *A*. El punto *D* se toma de modo que *ABCD* sea un paralelogramo. El lado *AD* del triángulo *ADE* está dividido en tres segmentos iguales por los baricentros de *ABC* y *BDC*, entonces la distancia desde el baricentro de *ABC* a la recta *n* es un tercio de la distancia desde *D* a *n*. Dado que la distancia desde *D* a *n* es la suma de las distancias desde *B* y *C* a *n*, esto es, $b–a+c–a = b+c–2a$, la distancia desde el baricentro de *ABC* hasta *m* es:

$$\frac{b+c-2a}{3}+a=\frac{a+b+c}{3}$$

Se concluye que el volumen del cuerpo generado por un triángulo que rota alrededor de una recta, externa al mismo, no depende de la posición relativa del triángulo y la recta, sino de la distancia entre el baricentro del triángulo y la recta. La respuesta al problema es entonces:

$$\pi \times 1 \times 2\text{cm}^3 = 2\pi\text{cm}^3$$

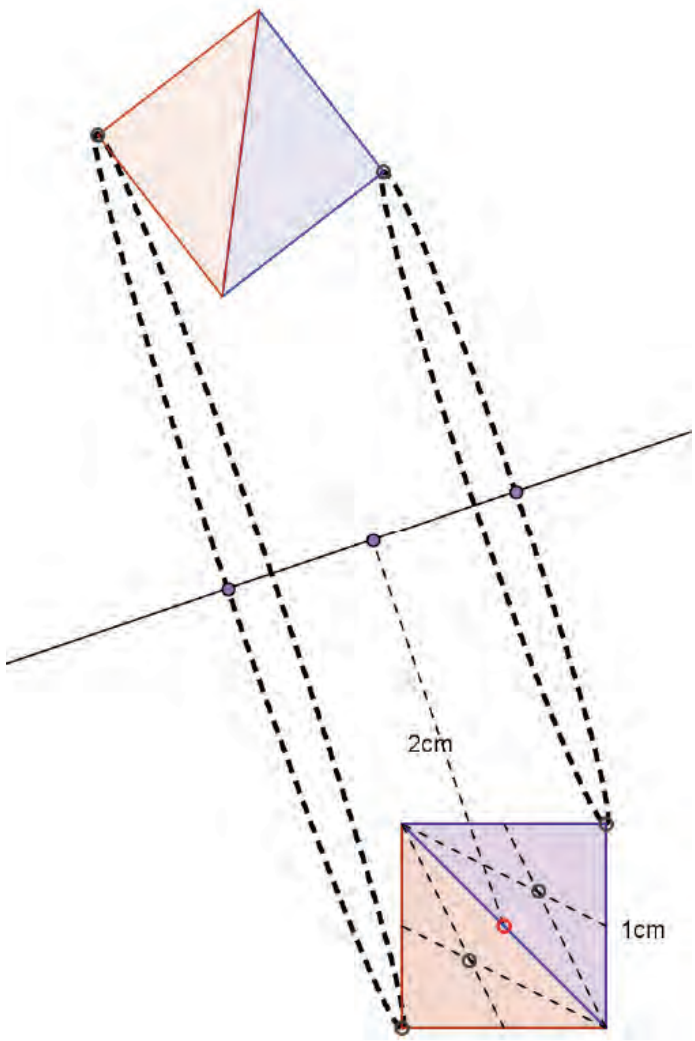
Teorema del centroide de Pappus para volúmenes.



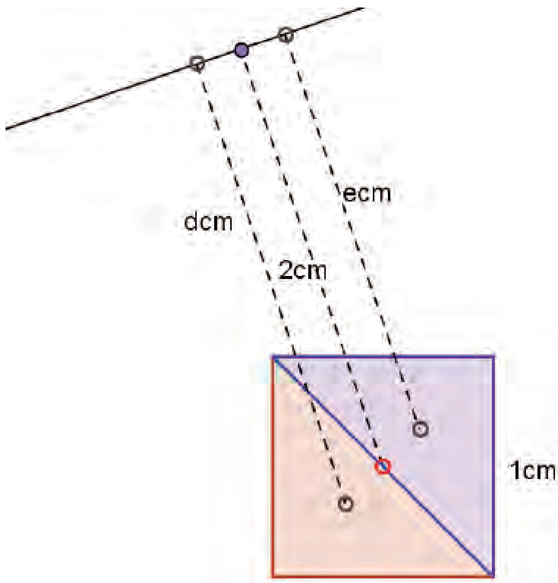
Problema 22 Hallar el volumen del cuerpo obtenido al hacer girar un cuadrado de lado 1cm, alrededor de una recta en el mismo plano del cuadrado, a 2cm de distancia de su centro.

Solución

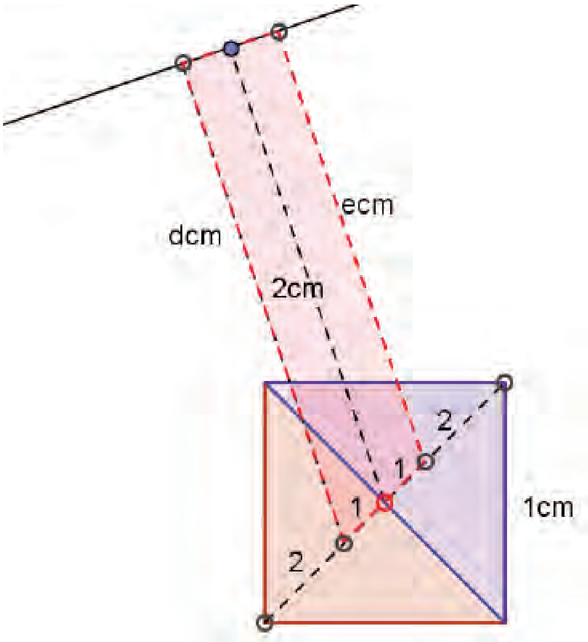
Si descomponemos el cuerpo en dos cuerpos, cada uno de ellos generado al rotar un triángulo alrededor de la recta en las condiciones del enunciado, evaluaremos el volumen usando el Problema 21.



El volumen del cuerpo es $\left(\frac{1}{2}\times 2d\pi+\frac{1}{2}\times 2e\pi\right)\text{cm}^3=(d+e)\pi$, donde d y e son las distancias de los baricentros de los triángulos a la recta.



Dado que el baricentro de un triángulo divide a las medianas en la relación 2:1, el centro del cuadrado es el punto medio de los baricentros de los triángulos que lo componen.



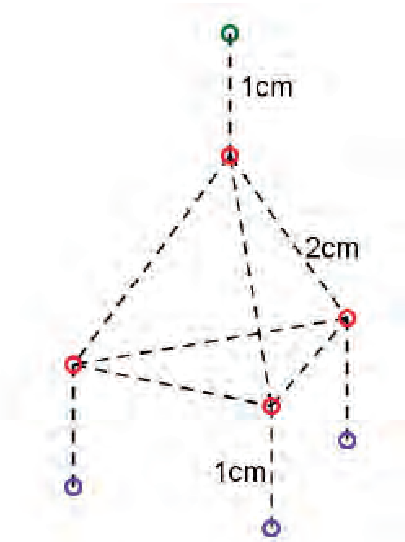
Encontramos que la base media de un trapecio, cuyas bases miden *e*cm y *d*cm, es de 2cm, es decir, $\frac{d+e}{2}=2$. Por lo tanto, el volumen del cuerpo es 4π.

Notar que el volumen no depende de la posición del cuadrado sino sólo de la distancia desde su centro hasta la recta.

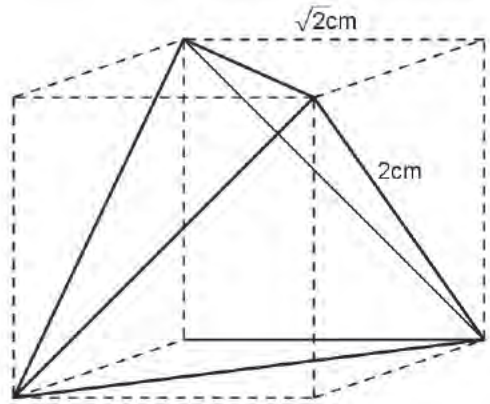
Problema 23 Cuatro esferas de radio 1cm se colocan en una mesa de modo que hagan contacto 2 a 2. ¿Qué altura alcanza este cuerpo?

Solución

Los centros de las esferas forman un tetraedro regular de arista 2cm. A la altura de este tetraedro hay que sumarle dos radios, o sea, 2cm. La figura muestra en color rojo los centros de las esferas, en color azul los puntos de contacto de las esferas con la superficie de la mesa y en color verde el punto más alto en la esfera que se apoya en las otras tres.



El paralelepípedo circunscripto a un tetraedro regular es un cubo. En este caso, el cubo que circunscribe al tetraedro de arista 2cm tiene su arista de $\sqrt{2}$cm.



El volumen del tetraedro es $\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}\right)^3 \text{cm}^3 = \frac{2}{3}\sqrt{2}\text{cm}^3$. El área del triángulo equilátero de arista 2cm es $\sqrt{3}\text{cm}^2$; como el volumen del tetraedro es también un tercio del área de la base por su altura h, se tiene:

$$\frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}h$$

de donde resulta:

$$h = \frac{2}{3}\sqrt{6}\text{cm}$$

Luego, la altura alcanzada por cuatro esferas es $\left(1+1+\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)\text{cm} = \left(2+\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)\text{cm}$.

Problema 24 Cuatro esferas de radio 1cm se colocan en una mesa de modo que hagan contacto 2 a 2. Una quinta esfera hace contacto con las cuatro esferas. ¿Cuál es su radio?

Solución

Los centros de las cuatro esferas son los vértices de un tetraedro regular con aristas de 2cm. La quinta esfera tiene por centro al centro de este tetraedro. El radio de la quinta esfera será el radio de la esfera circunscripta al tetraedro menos 1cm. La esfera circunscripta al tetraedro regular considerado también circunscribe al cubo de arista $\sqrt{2}$cm, paralelepípedo circunscripto al tetraedro. El radio de esta esfera es la mitad de la diagonal interior del cubo, es decir,

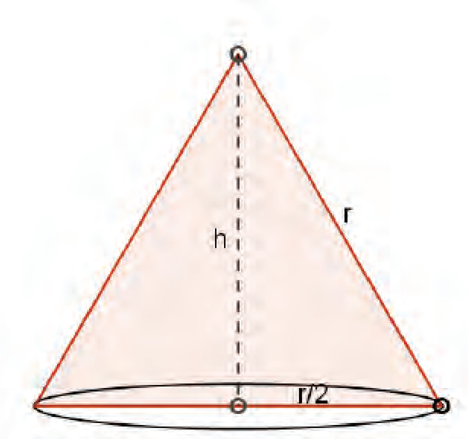
$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2}\right)\text{cm} = \frac{\sqrt{6}}{2}\text{cm}.$$

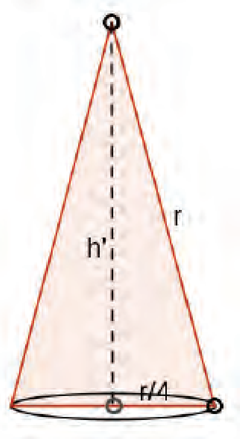
Finalmente, el radio de la quinta esfera es $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right)\text{cm} = \frac{\sqrt{6}-2}{2}\text{cm}$.

Problema 25 Con un semicírculo de cartulina se puede hacer un cono o un bicono formado por dos conitos iguales. ¿Cuál tiene más volumen, el cono o el bicono?

Solución

Si r es el radio del semicírculo, con la longitud $\pi \times r$ de la semicircunferencia podemos formar una circunferencia de radio $r/2$ o dos circunferencias de radio $r/4$. En consecuencia, el radio de la base del cono es $r/2$ y el radio en la base de cada uno de los conitos es $r/4$. La altura del cono es $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ y la de los conitos, $\frac{\sqrt{15}}{4}r$ según surge del *Teorema de Pitágoras* en ambos casos.



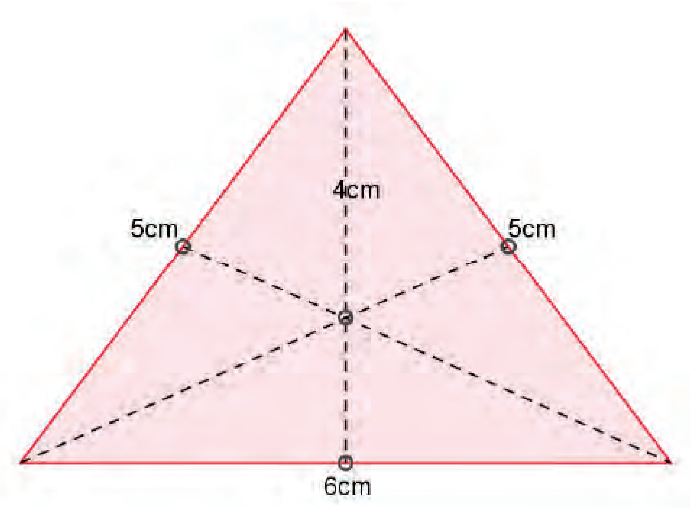


Luego, el volumen del cono es $\pi \frac{r^2}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}r = \pi \frac{\sqrt{3}}{8}r^3$ y el volumen de cada conito es $\pi \frac{r^2}{16}\frac{\sqrt{15}}{4}r = \pi \frac{\sqrt{15}}{64}r^3$. Entre los dos conitos suman un volumen de $\pi \frac{\sqrt{15}}{32}r^3$. Como $\frac{\sqrt{3}}{8} = 0,21651...$ es mayor que $\frac{\sqrt{15}}{32} = 0,12103...$, resulta que el volumen del cono es mayor que el del bicono.

Problema 26 Se hace rotar un triángulo cuyos lados miden 6cm, 5cm y 5cm, alrededor de uno de sus lados. ¿Qué volúmenes tienen los cuerpos así obtenidos?

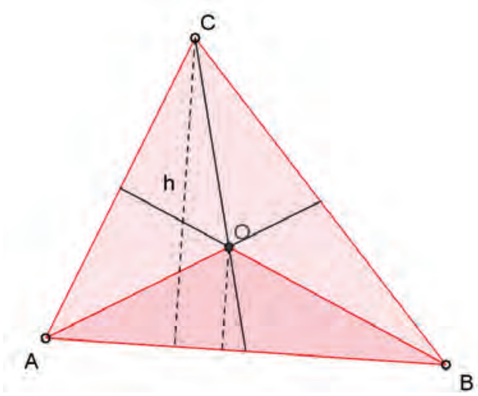
Solución

Como el triángulo es isósceles, la mediana y la altura, sobre la base del triángulo, coinciden. Usando Pitágoras, puede calcularse el valor de esta mediana que es 4cm, y así el área del triángulo es 12cm².



Teniendo en cuenta el área, la altura sobre un lado de 5cm mide $\frac{24}{5}$cm. Por otra parte, es oportuno observar que:

La distancia desde el baricentro de un triángulo a uno de sus lados es igual a un tercio de la altura correspondiente.



Según la figura, las medianas descomponen al triángulo *ABC* en seis triángulos de igual área. Por lo tanto, el área de *ABO* es $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ del área de *ABC*. Como *ABO* y *ABC* comparten la base *AB*, la distancia de *O* al lado *AB* es $\frac{1}{3}h$.

Por esta propiedad, las distancias del baricentro a los lados son:

$$\frac{1}{3}4\text{cm}=\frac{4}{3}\text{cm} \text{ y } \frac{1}{3}\frac{24}{5}\text{cm}=\frac{8}{5}\text{cm}.$$

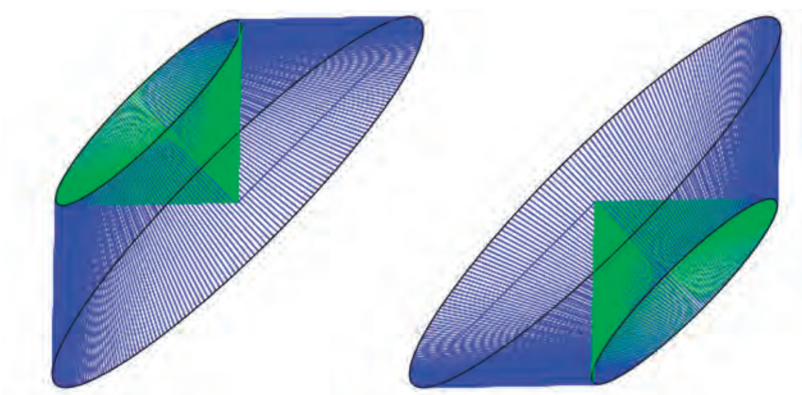
En el Problema 21, se vio que el volumen del cuerpo obtenido al rotar un triángulo alrededor de una recta que no pase por su interior es el producto entre el área del triángulo y la longitud de la circunferencia que tiene por radio a la distancia entre el baricentro del triángulo y la recta (*Teorema de Pappus*). En nuestro caso, los volúmenes son:

$$12\times\frac{8}{3}\pi\text{cm}^3 \text{ y } 12\times\frac{16}{5}\pi\text{cm}^3.$$

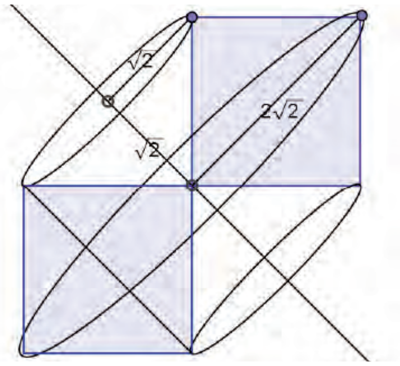
Problema 27 Se hace rotar un cuadrado de 2cm de lado, alrededor de una recta paralela a una diagonal que pasa por un vértice que no está en la diagonal. ¿Qué volumen y qué área tiene el cuerpo obtenido?

Solución

El cuerpo es un bitronco de cono simétrico (es decir, está formado por troncos de conos iguales) al que se le han quitado dos conos iguales. Para una mejor visualización, hacemos girar por separado cada una de las mitades obtenidas al dividir el cuadrado por una diagonal. En cada caso se distingue un tronco de cono menos un cono.



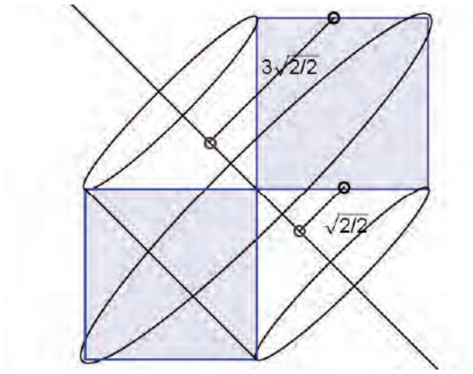
Con los datos de la figura siguiente:



el volumen puede obtenerse como:

$$2\left(\frac{\pi\sqrt{2}(8+2+4)}{3}-\frac{\pi 2\sqrt{2}}{3}\right)\text{cm}^3 = 8\sqrt{2}\pi\text{cm}^3$$

Para el área, usamos el resultado del Problema 17 y los datos de esta figura:



El área es:

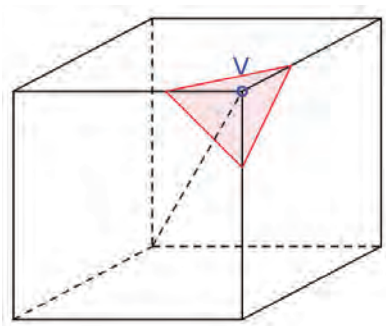
$$2\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)cm^2 = 4\sqrt{2}\pi\text{cm}^2$$

Nota: Calcular el volumen del cuerpo usando el resultado del Problema 22.

Problema 28 ¿Se puede guardar un cilindro de radio 1cm y largo 1,70m en una caja cúbica de 1m de arista, medida en su interior?

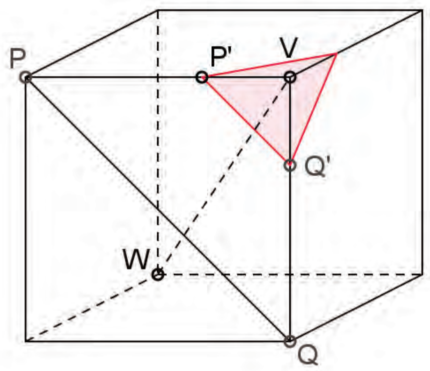
Solución

Se forma un triángulo con un vértice en cada una de las aristas que concurren en un vértice *v* del cubo, los tres a la misma distancia de *v*. Por construcción, el triángulo es equilátero y el plano que lo contiene resulta perpendicular a la diagonal interior del cubo que llega a *v*. La figura ilustra la situación enunciada.



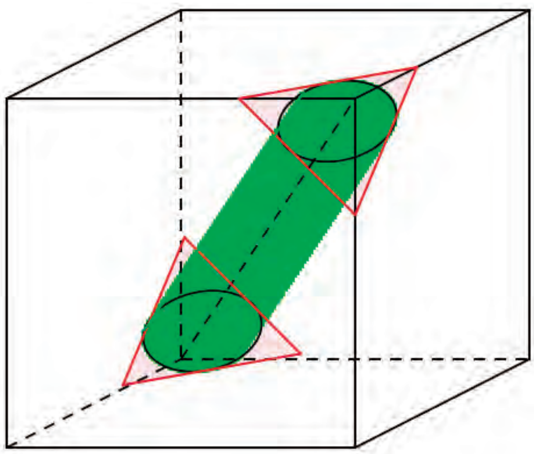
NOTAS DE GEOMETRÍA 5

Para justificar la perpendicularidad entre el plano del triángulo y la diagonal interior *VW*, consideremos la diagonal *PQ* en la cara del cubo que contiene el lado *P′Q′* del triángulo, como muestra la figura.

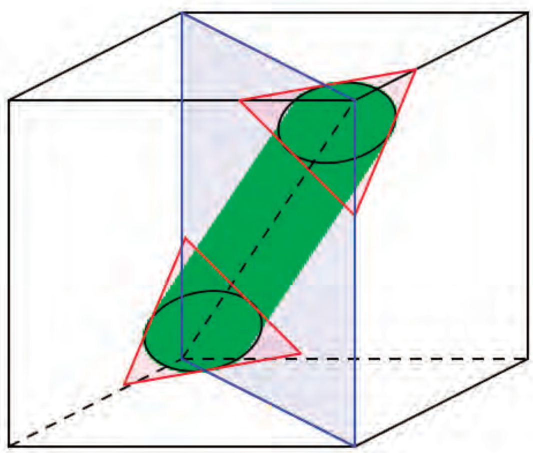


Es claro que los segmentos *PQ* y *P′Q′* son paralelos y que los puntos *V* y *W* equidistan de *P* y *Q*, es decir que la recta *VW* se encuentra en el plano bisector del segmento *PQ*. En consecuencia, la recta *VW* es perpendicular a *PQ* y también a *P′Q′*. De manera análoga puede establecerse que los otros dos lados del triángulo son perpendiculares a *VW*, de donde resulta la perpendicularidad entre la diagonal *VW* y el plano del triángulo.

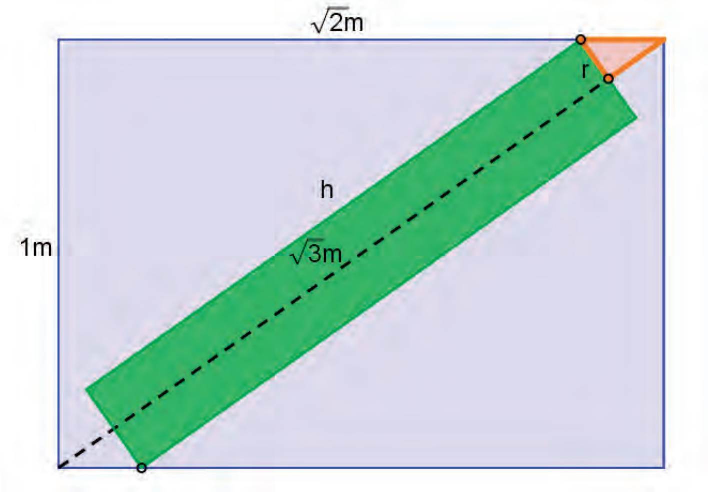
La circunferencia inscripta en este triángulo y su opuesta (simétrica respecto del centro) son las bases de un cilindro dentro del cubo.



La relación entre el radio *r* de la base y la altura *h* de este cilindro puede verse en una sección rectangular del cubo, de lados 1m, $\sqrt{2}$m y diagonal $\sqrt{3}$m.



Notemos que el cilindro hace contacto con la cara superior y la cara inferior del cubo, precisamente en los puntos medios de los lados de los triángulos que se encuentran sobre dichas caras.



El triángulo destacado en color naranja en el extremo superior derecho de la figura precedente es semejante al triángulo rectángulo de lados 1m, $\sqrt{2}$m y $\sqrt{3}$m, entonces sus lados miden rm, $r\sqrt{2}$m y $r\sqrt{3}$m. Resulta que $h=\left(\sqrt{3}-2r\sqrt{2}\right)$m y es posible ubicar dentro del cubo un cilindro de radio r y altura $\left(\sqrt{3}-2r\sqrt{2}\right)$m, siempre que este valor sea mayor que cero. Un cilindro de 1cm de radio y $\left(\sqrt{3}-2\times 0{,}01\times\sqrt{2}\right)\text{m}=1{,}703\ldots\text{m}$ de altura puede ser ubicado dentro del cubo. Finalmente, el cilindro del enunciado puede ser ubicado dentro del cubo.

Problema 29

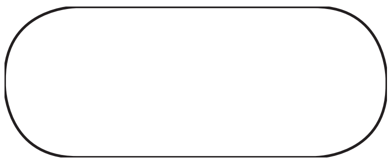
Un cilindro hueco y cerrado tiene la mitad de su volumen con agua. En el centro del cilindro hay una pulga. ¿Es posible encontrar una posición del cilindro para que la pulga no se moje?

Solución

No es posible. Dado que el cilindro es un cuerpo con centro, toda sección que divida al cilindro en dos cuerpos del mismo volumen pasa necesariamente por su centro.

Problema 30

Una cápsula se fabricó uniendo una semiesfera en cada uno de los extremos de un cilindro de 3cm de radio por 18cm de largo. Si con la misma cantidad de material se hubiera fabricado una cápsula con forma esférica, ¿cuál de las cápsulas tendría mayor capacidad?



Solución

El material utilizado está dado por el área de la cápsula, es decir, $(4\pi 3^2+2\pi 3\times 18)\text{cm}^2 = 144\pi\text{cm}^2$. Con el mismo material, se puede fabricar una esfera de radio r sujeto a la condición de que $144\pi = 4\pi r^2$, o sea, $r = 6$. El volumen de la cápsula es $(4\pi 3^3/3+\pi 3^2\times 18)\text{cm}^3 = 198\pi\text{cm}^3$, el volumen de la esfera es $(4\pi 6^3/3)\text{cm}^3 = 288\pi\text{cm}^3$, de modo que la cápsula esférica tiene mayor capacidad.

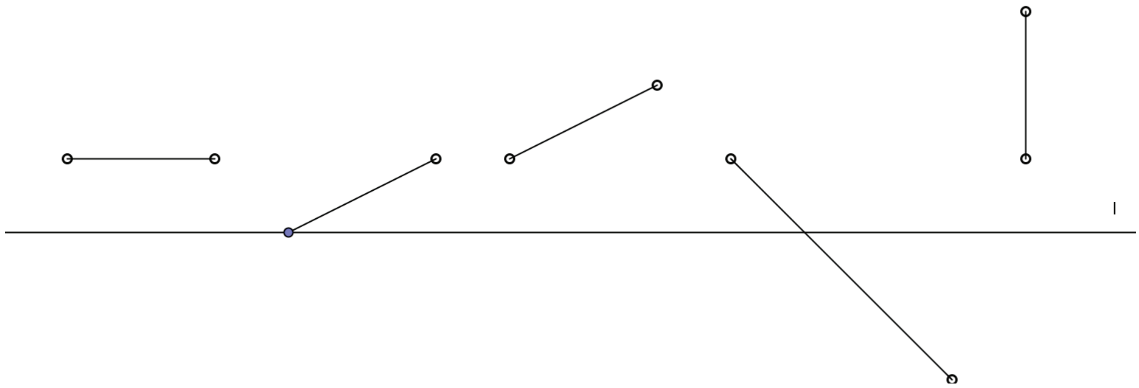
APÉNDICE

Vemos los cuerpos redondos como sólidos de revolución, es decir:

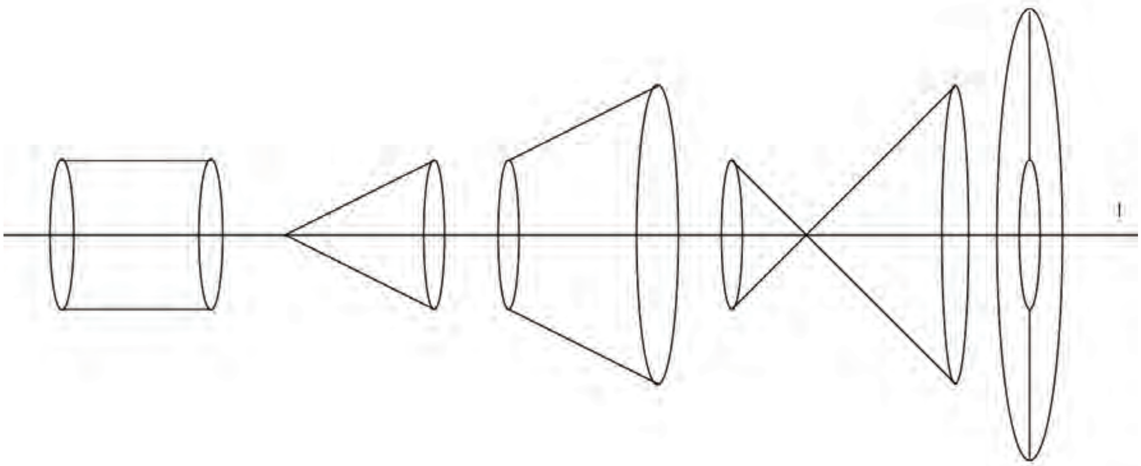
Cuerpos obtenidos al girar en el espacio una figura plana alrededor de una recta que se encuentra en el mismo plano de la figura.

Cilindros, conos, biconos y troncos de conos

Si se hace girar en el espacio un segmento alrededor de la recta *l*, ambos en un mismo plano, se obtiene lo que podemos llamar la cara lateral de un cuerpo. La figura a continuación ilustra los distintos casos.



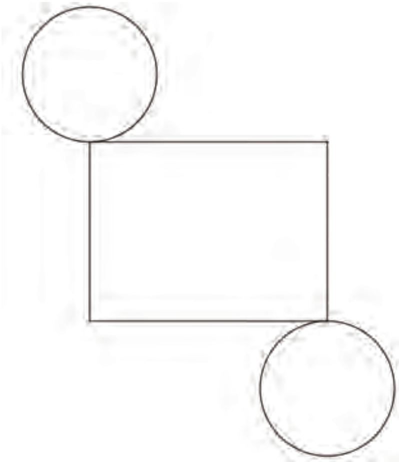
En el primer caso el segmento es paralelo a la recta, en los demás casos el segmento no es paralelo a la recta y en el último caso es perpendicular a la recta.



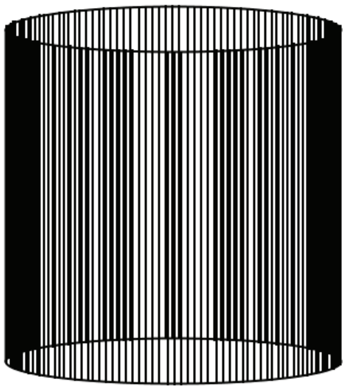
Salvo en el último caso, que es una corona circular, las superficies generadas no están en un plano y son caras de cuerpos conocidos como: cilindro, en el primer caso; cono, en el segundo caso; tronco de cono, en el tercer caso, y bicono, en el cuarto caso. Los cuerpos mencionados tienen además otras caras que son círculos; salvo el cono, que tiene una cara circular, los demás cuerpos tienen dos caras circulares.

El segmento que gira se llama *generatriz del cuerpo de revolución* y la recta alrededor de la cual gira el segmento se llama *eje del cuerpo de revolución*.

Cilindro. El desarrollo de un cilindro está formado por los dos círculos de las bases y un rectángulo con un lado de igual longitud que las circunferencias en las bases y el otro lado de igual longitud que la generatriz. Esta última longitud se conoce como la altura del cilindro.



El rectángulo se une por dos lados opuestos para dar lugar a la cara lateral y los círculos forman las bases del cilindro.



Cilindro

Si r es el radio de los círculos bases y h es la altura del cilindro, entonces se tiene:

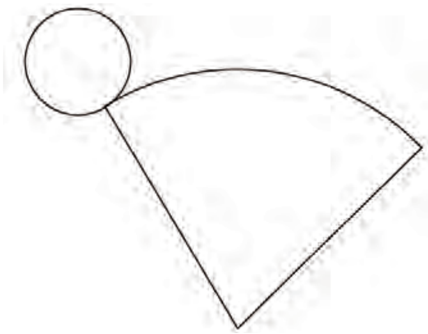
Área lateral: $2\pi rh$

Área total: $2\pi rh+2\pi r^2$

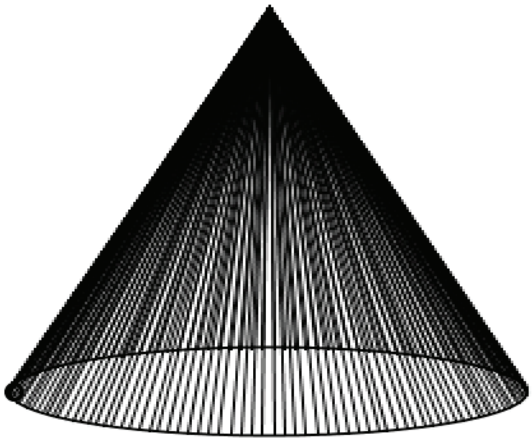
El volumen del cilindro es igual al área de la base por la altura, es decir:

Volumen: $\pi r^2 h$

Cono. El desarrollo de un cono está formado por el círculo de la base y un sector circular, cuya longitud de arco es igual a la longitud de la circunferencia de la base y cuyo radio es igual a la longitud de la generatriz del cono.



El sector circular se une por sus radios para dar lugar a la cara lateral y el círculo forma la base del cono.



Cono

El área lateral del cono es el área del sector circular que se obtiene en su desarrollo. Si r es el radio de la base, g la generatriz y h la altura del cono, es decir, la distancia desde el vértice en la parte superior hasta el plano de la base del cono, se tiene:

Área lateral: πrg

Área total: $\pi rg + \pi r^2$

El volumen del cono es igual a 1/3 del área de la base por la altura, es decir:

$$\text{Volumen: } \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

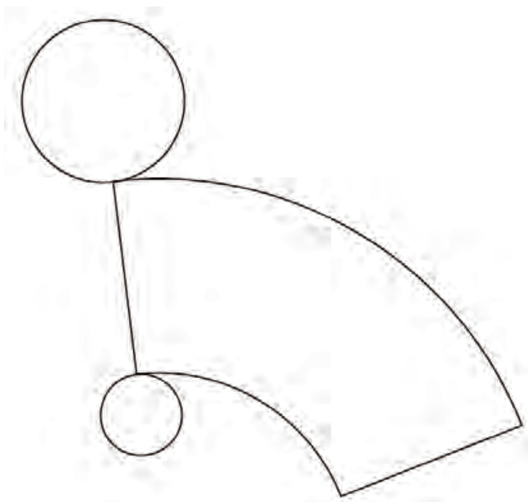
Teniendo en cuenta que $g^2 = h^2 + r^2$, podemos obtener el volumen como:

$$\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{g^2 - r^2}$$

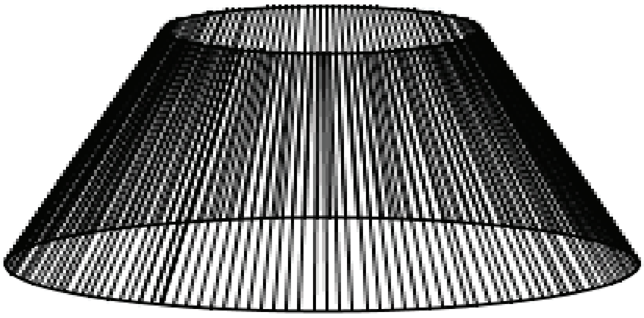
o bien:

$$\frac{1}{3}\pi\left(g^2 - h^2\right)h$$

Tronco de cono. El desarrollo del tronco de cono está formado por dos círculos (base mayor y base menor del cono) y un sector de corona circular con longitudes de arcos iguales a las longitudes de las circunferencias en las respectivas bases y con el ancho de la corona igual a la longitud de la generatriz del cono.



El sector de la corona circular se une por sus segmentos para dar lugar a la cara lateral y los círculos forman las bases del tronco de cono.



Tronco de cono

Tanto el volumen como el área lateral del tronco de cono pueden obtenerse como diferencia de volúmenes de conos y como diferencia de áreas de conos.

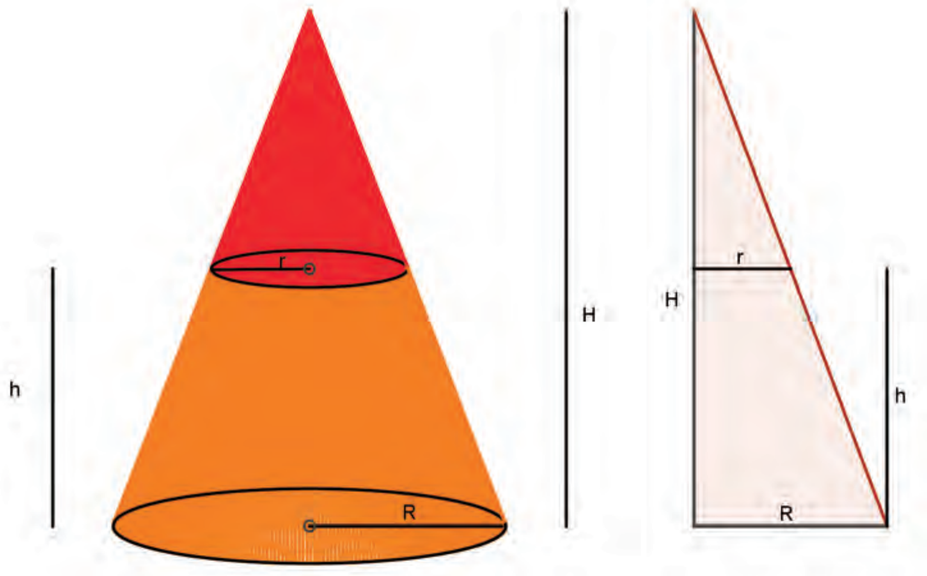
Si llamamos *r* al radio de la base menor, *R* al radio de la base mayor, *g* a la generatriz y *h* a la altura, es decir, la distancia entre las bases, se tiene:

Área lateral: $\pi g(r+R)$

Área total: $\pi g(r+R)+ \pi r^2+ \pi R^2$

Volumen: $(1/3)\pi h(R^2+Rr+r^2)$

Veamos la obtención de la fórmula del volumen según la indicación dada.a



De acuerdo con la figura precedente, los volúmenes de los conos involucrados son respectivamente:

$$\frac{1}{3}\pi R^2H \quad y \quad \frac{1}{3}\pi r^2(H-h)$$

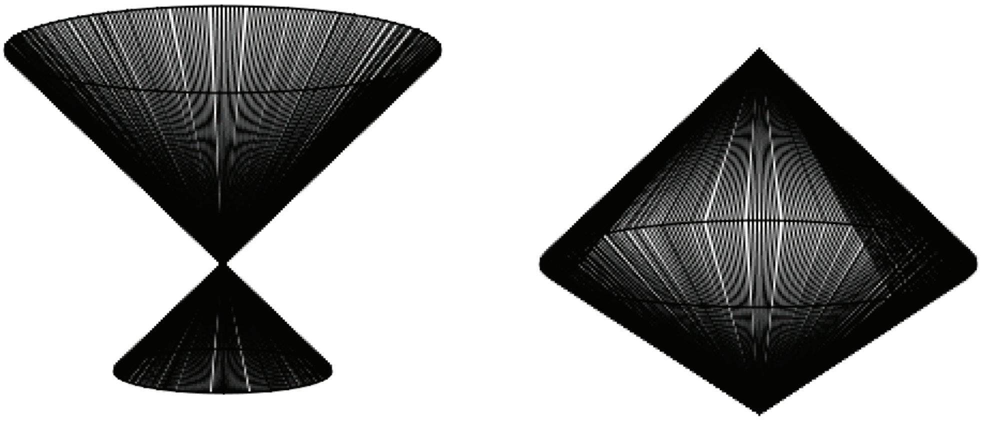
y el volumen del tronco es:

$$\frac{1}{3}\pi\left(R^2H - r^2(H-h)\right) = \frac{1}{3}\pi\left(R^2H - r^2H + r^2h\right) = \frac{1}{3}\pi\left(H\left(R^2 - r^2\right) + r^2h\right)$$

Por semejanza de triángulos, resulta $\frac{H}{R} = \frac{H-h}{r}$, de modo que $H = \frac{Rh}{R-r}$. En definitiva, el volumen del tronco es:

$$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{Rh}{R-r}\left(R^2 - r^2\right) + r^2h\right) = \frac{1}{3}\pi\left(Rh\left(R+r\right) + r^2h\right) = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

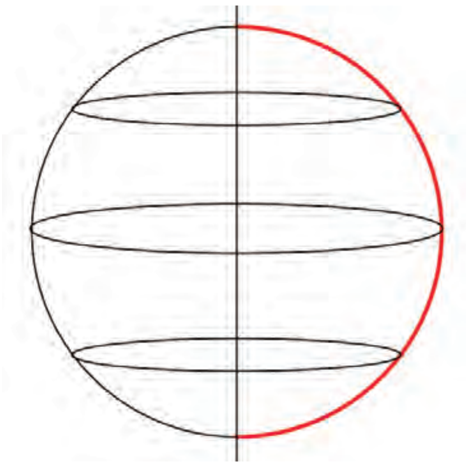
Bicono. El bicono puede verse como la unión por sus vértices de dos conos que comparten el eje y son proporcionales; es decir, el cociente entre la generatriz y el radio toma el mismo valor para ambos conos. También puede usarse el término bicono para los cuerpos que se obtengan al unir dos conos por sus bases iguales.



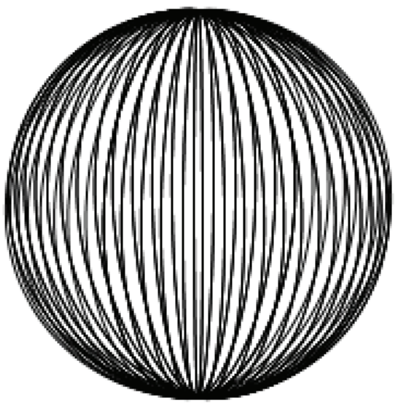
Las áreas y los volúmenes de los biconos se obtienen como sumas de áreas y volúmenes de conos.

Esfera y casquete esférico

Esfera. La esfera es el cuerpo redondo que se obtiene al girar en el espacio un semicírculo alrededor de la recta que pasa por su diámetro. La superficie generada por el arco de circunferencia se llama *superficie esférica*.



La esfera no tiene un desarrollo plano como ocurre en los casos precedentes. El radio de la esfera es el radio del semicírculo que la genera.



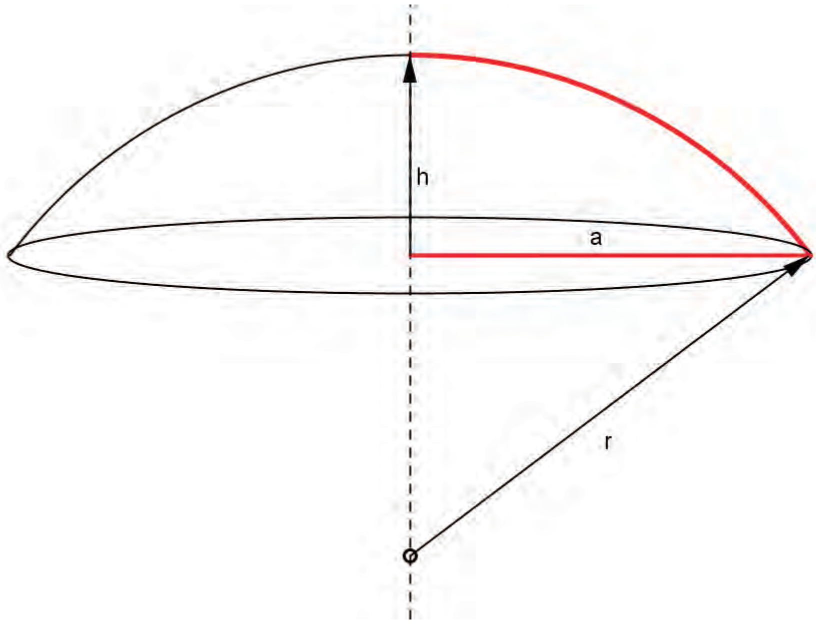
Esfera

El punto medio del diámetro del semicírculo se llama *centro de la esfera*. Si r denota el radio de la esfera, se tiene:

$$\text{Área: } 4\pi r^2$$

$$\text{Volumen: } (4/3)\,\pi r^3$$

Casquete esférico. Cuando un arco de circunferencia, con ángulo central menor que π, gira alrededor de la recta que pasa por el centro de la circunferencia y uno de los extremos del segmento, se genera una porción de superficie esférica que es la cara lateral de un cuerpo llamado *casquete esférico*. Este cuerpo tiene además una cara circular generada por el segmento perpendicular al eje de rotación, que une el eje con el otro extremo del arco de circunferencia.



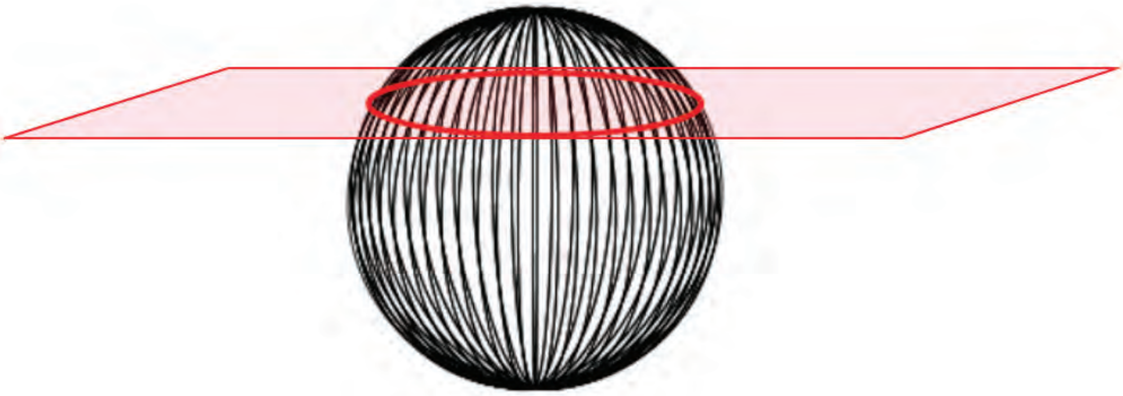
Con los datos r, a y h de la figura, se tiene:

$$\text{Área lateral: } 2\pi rh = \pi(a^2+h^2)$$

$$\text{Área total: } 2\pi rh+\pi a^2 = \pi(2a^2+h^2)$$

$$\text{Volumen: } (1/3)\pi h(3a^2+h^2) = (1/3)\pi h(3r-h)$$

El casquete esférico también puede ser visto como una de las piezas en las que un plano secciona a una esfera.

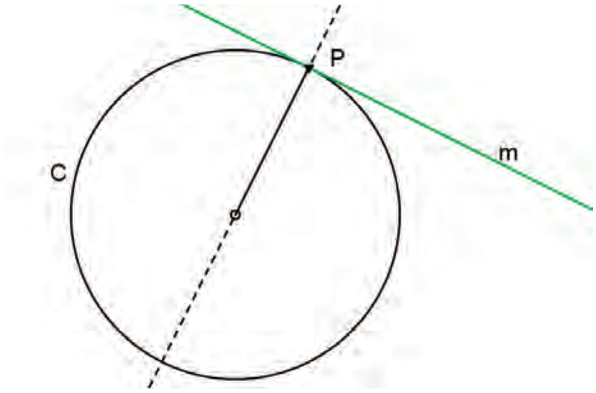


Casquete esférico

Plano tangente

El *plano tangente* a una esfera, en un punto *P*, es el plano perpendicular al radio de la esfera determinado por *P* que pasa por el punto *P*.

Dado un punto *P* sobre una esfera, la sección de ésta por un plano que contenga al radio determinado por *P* es una circunferencia *C* que contiene a *P*.

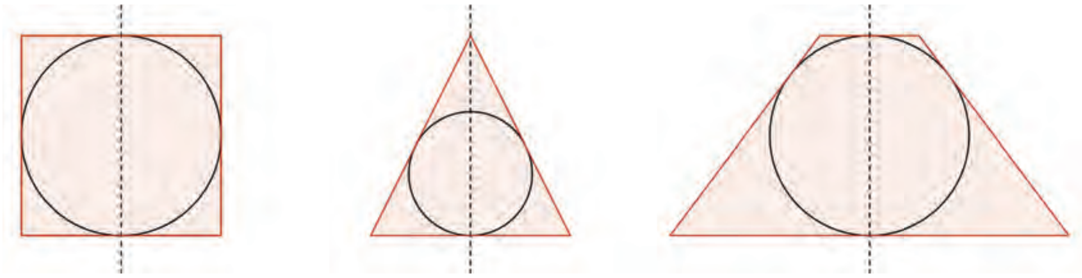


Es oportuno observar que el plano tangente a una esfera en el punto *P* es el plano que resulta de hacer girar la recta *m*, que es tangente a *C* en el punto *P*.

Esfera inscripta

Una esfera está *inscripta* en un prisma o en una pirámide, si los planos determinados por las caras del cuerpo son tangentes a la esfera.

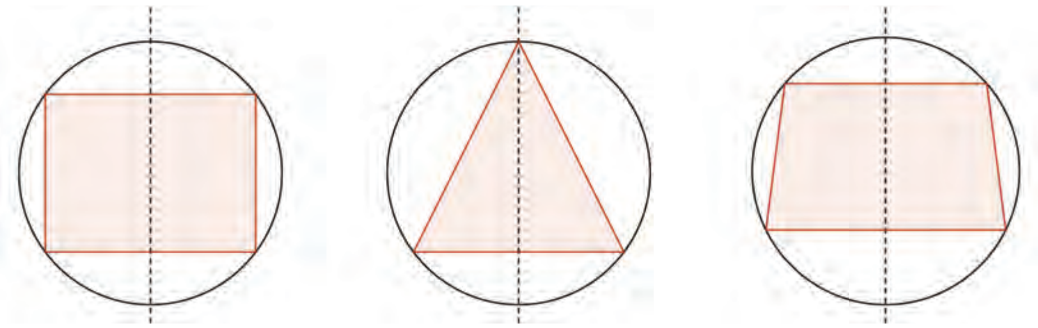
Una esfera está *inscripta* en un cuerpo de revolución (cilindro, cono, tronco de cono), si su centro se encuentra sobre el eje del cuerpo y toda sección por un plano que contenga al eje consiste en una circunferencia inscripta en la sección del cuerpo (rectángulo, triángulo, trapecio isósceles).



Esfera circunscripta

Una esfera está *circunscripta* a un prisma o pirámide, si todos los vértices del cuerpo están sobre la esfera.

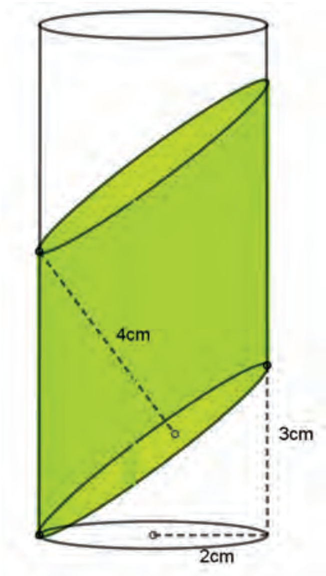
Una esfera está *circunscripta* a un cuerpo de revolución, si su centro se encuentra sobre el eje del cuerpo y toda sección por un plano que contenga al eje consiste en una circunferencia circunscripta a la sección del cuerpo (rectángulo, triángulo, trapecio isósceles).



Problemas propuestos

1. Dos planos paralelos, a 4cm de distancia uno del otro y con la inclinación indicada en la figura, seccionan un cilindro de 2cm de radio en su base.

Hallar el volumen del cuerpo limitado por ambas secciones.



2. Se hace rotar un hexágono regular de 1cm de lado alrededor de uno de sus lados. ¿Qué área y volumen tiene el cuerpo generado?

3. Una mediana de un triángulo lo descompone en dos triángulos. Si estos triángulos giran alrededor de dicha mediana, se obtienen dos cuerpos; el volumen de uno de ellos es $30cm^3$. Hallar el volumen del otro cuerpo.

4. Hallar el área de la esfera inscripta en un cono de 4cm de altura y 3cm de radio en la base.

Nota: Una esfera está inscripta en un cono, si hace contacto en un punto de la base y en una circunferencia en la cara lateral del cono.

5. Tres caños cilíndricos de iguales dimensiones hacen contacto dos a dos, a lo largo de una generatriz. Por la cavidad limitada por estos caños se hará pasar una pieza que puede ser:

a) Cilíndrica.

b) Un prisma triangular con base regular.

c) Material de amalgama.

Hallar el volumen máximo de la pieza en cada caso, si los caños tienen 1m de diámetro por 2m de longitud.

6. Una pirámide recta de 5cm de altura y con un hexágono regular en la base de 1cm de lado gira alrededor de su eje. ¿Cuál es el volumen del cuerpo obtenido? ¿Cuál es el área?

7. Un triángulo equilátero de 6cm de lado gira alrededor de una base media. Calcular el volumen y el área del cuerpo obtenido.

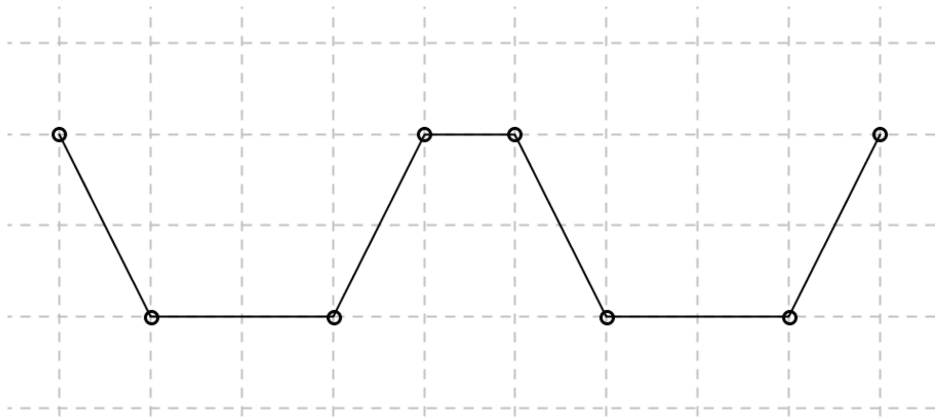
8. Un triángulo rectángulo gira alrededor de cada uno de sus catetos, generando dos cuerpos de igual volumen. Hallar los ángulos del triángulo.

9. Un triángulo rectángulo de 3cm, 4cm y 5cm de lados gira alrededor de su hipotenusa. Hallar el volumen del bicono generado.

10. Un arco de circunferencia gira alrededor de un diámetro de la circunferencia. Indicar cómo hallaría el área de la superficie generada, según los distintos casos que puedan presentarse.

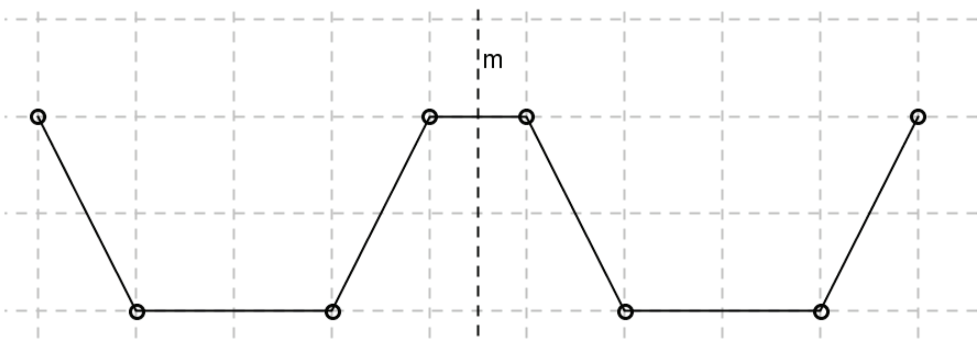
11. Un sector circular de radio 1cm y 60° de ángulo central gira alrededor su bisectriz. Hallar el área y el volumen del cuerpo obtenido.

12. Calcular la cantidad de aluminio necesario para hacer una flanera cuyo perfil muestra la figura, donde cada cuadrito es de 5cm de lado.

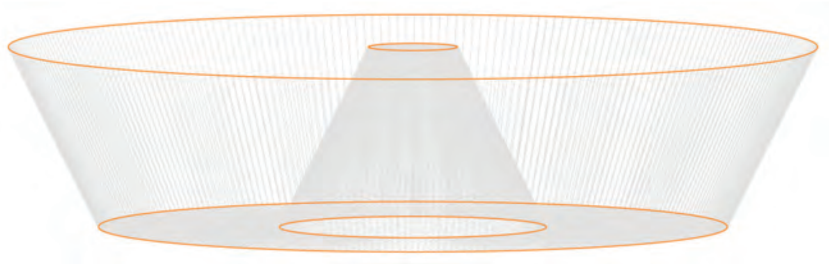


¿Cuál es la capacidad de la flanera?

Nota: La superficie de la flanera se obtiene al hacer girar la poligonal dada alrededor de la recta m.



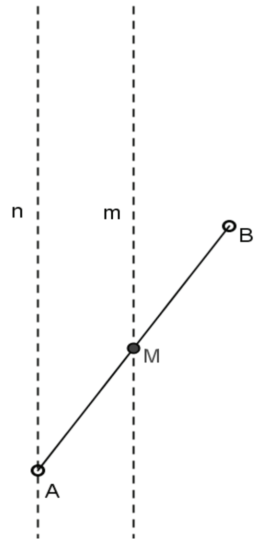
La siguiente figura ilustra la situación planteada.



13. Se tiene un rectángulo de 12cm de perímetro. Si se gira alrededor de uno de sus lados se obtiene un cilindro cuyo volumen es el doble del que se obtendría si se girara alrededor del otro lado. Hallar el área del rectángulo.

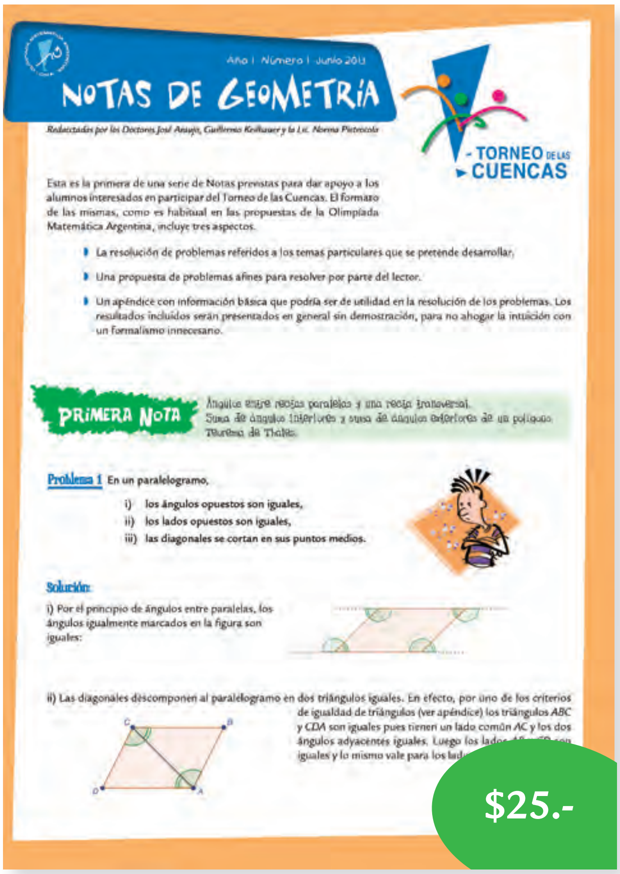
14. ¿A qué altura debe seccionarse un cono, de 10cm de altura, con un plano paralelo a su base para obtener dos cuerpos de igual área lateral?

15. Las rectas *m* y *n* son paralelas y *m* pasa por el punto medio *M* del segmento *AB*. Si se gira el segmento *AB* alrededor de la recta *m*, se obtiene una superficie de 20cm^2. ¿Qué área tendrá la superficie obtenida al girar *AB* alrededor de la recta *n*?



Valor de este ejemplar $ 54.-

También pueden interesarte


Año I - Número 1 - Junio 2013

NOTAS DE GEOMETRÍA

Redactadas por los Doctores José Araujo, Guillermo Keilhauer y la Lic. Norma Pietrocola

TORNEO DE LAS CUENCAS

Esta es la primera de una serie de Notas previstas para dar apoyo a los alumnos interesados en participar del Torneo de las Cuencas. El formato de las mismas, como es habitual en las propuestas de la Olimpíada Matemática Argentina, incluye tres aspectos.

- La resolución de problemas referidos a los temas particulares que se pretende desarrollar.
- Una propuesta de problemas afines para resolver por parte del lector.
- Un apéndice con información básica que podría ser de utilidad en la resolución de los problemas. Los resultados incluidos serán presentados en general sin demostración, para no ahogar la intuición con un formalismo innecesario.

PRIMERA NOTA

Ángulos entre rectas paralelas y una recta transversal. Suma de ángulos interiores y suma de ángulos exteriores de un polígono. Teorema de Thales.

Problema 1 En un paralelogramo,

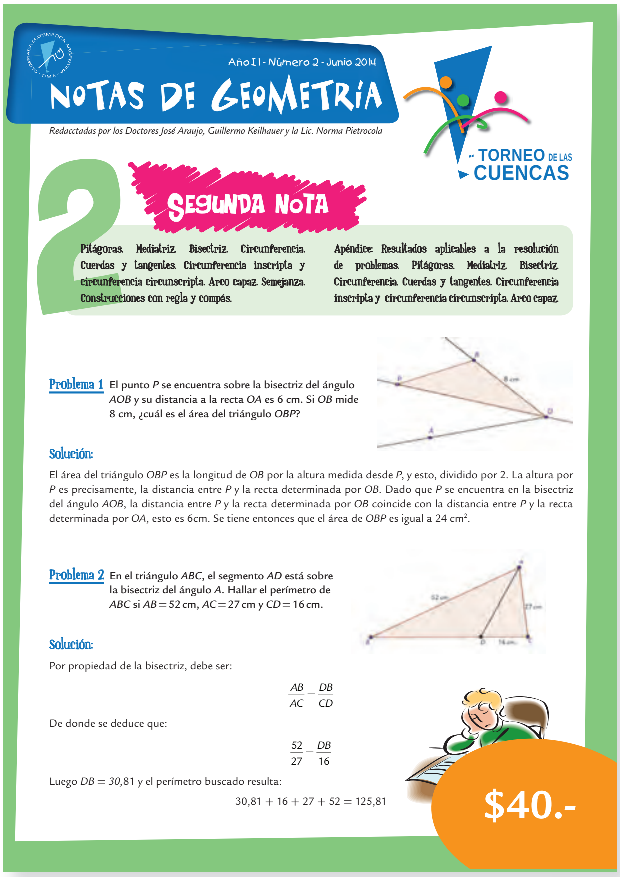
i) los ángulos opuestos son iguales,
ii) los lados opuestos son iguales,
iii) las diagonales se cortan en sus puntos medios.

Solución:

i) Por el principio de ángulos entre paralelas, los ángulos igualmente marcados en la figura son iguales:

ii) Las diagonales descomponen al paralelogramo en dos triángulos iguales. En efecto, por uno de los criterios de igualdad de triángulos (ver apéndice) los triángulos ABC y CDA son iguales pues tienen un lado común AC y los dos ángulos adyacentes iguales. Luego los lados ...

$25.-


Año I - Número 2 - Junio 2014

NOTAS DE GEOMETRÍA

Redactadas por los Doctores José Araujo, Guillermo Keilhauer y la Lic. Norma Pietrocola

TORNEO DE LAS CUENCAS

2 SEGUNDA NOTA

Pitágoras. Mediatriz. Bisectriz. Circunferencia. Cuerdas y tangentes. Circunferencia inscripta y circunferencia circunscripta. Arco capaz. Semejanza. Construcciones con regla y compás.

Apéndice: Resultados aplicables a la resolución de problemas. Pitágoras. Mediatriz. Bisectriz. Circunferencia. Cuerdas y tangentes. Circunferencia inscripta y circunferencia circunscripta. Arco capaz.

Problema 1 El punto P se encuentra sobre la bisectriz del ángulo AOB y su distancia a la recta OA es 6 cm. Si OB mide 8 cm, ¿cuál es el área del triángulo OBP?

Solución:

El área del triángulo OBP es la longitud de OB por la altura medida desde P, y esto, dividido por 2. La altura por P es precisamente, la distancia entre P y la recta determinada por OB. Dado que P se encuentra en la bisectriz del ángulo AOB, la distancia entre P y la recta determinada por OB coincide con la distancia entre P y la recta determinada por OA, esto es 6cm. Se tiene entonces que el área de OBP es igual a 24 cm^2.

Problema 2 En el triángulo ABC, el segmento AD está sobre la bisectriz del ángulo A. Hallar el perímetro de ABC si $AB = 52$ cm, $AC = 27$ cm y $CD = 16$ cm.

Solución:

Por propiedad de la bisectriz, debe ser:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{CD}$$

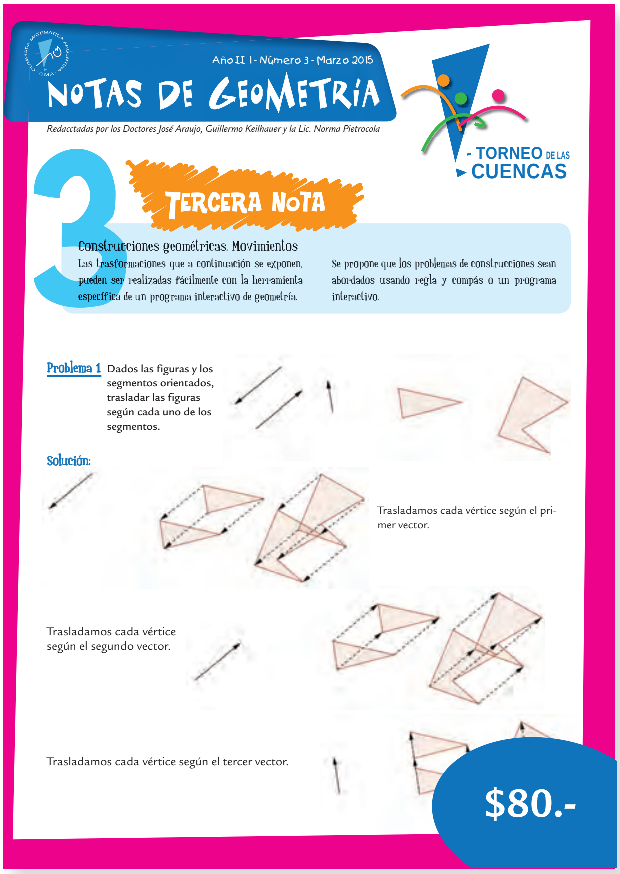
De donde se deduce que:

$$\frac{52}{27} = \frac{DB}{16}$$

Luego $DB = 30{,}81$ y el perímetro buscado resulta:

$$30{,}81 + 16 + 27 + 52 = 125{,}81$$

$40.-


Año II - Número 3 - Marzo 2015

NOTAS DE GEOMETRÍA

Redactadas por los Doctores José Araujo, Guillermo Keilhauer y la Lic. Norma Pietrocola

TORNEO DE LAS CUENCAS

3 TERCERA NOTA

Construcciones geométricas. Movimientos

Las trasformaciones que a continuación se exponen, pueden ser realizadas fácilmente con la herramienta específica de un programa interactivo de geometría.

Se propone que los problemas de construcciones sean abordados usando regla y compás o un programa interactivo.

Problema 1 Dados las figuras y los segmentos orientados, trasladar las figuras según cada uno de los segmentos.

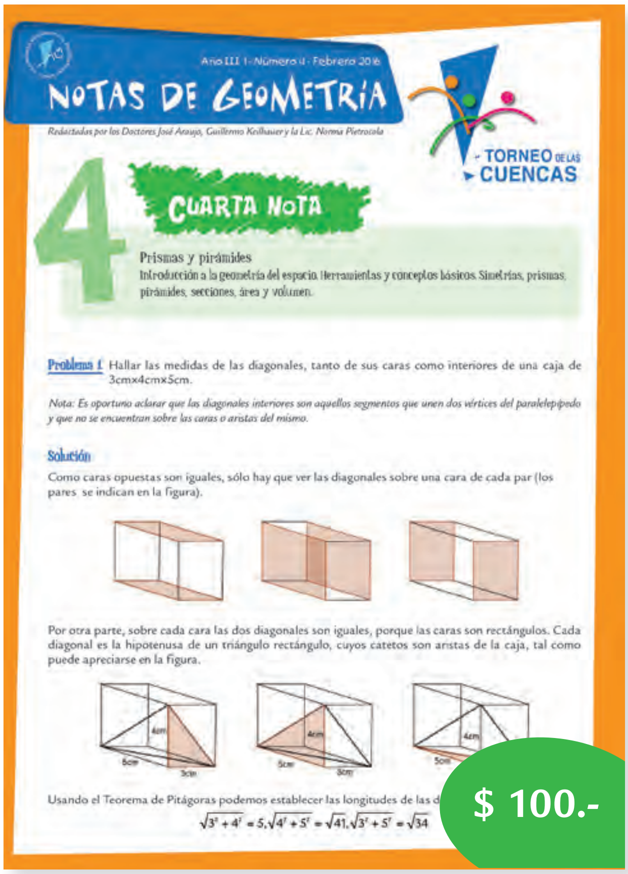
Solución:

Trasladamos cada vértice según el primer vector.

Trasladamos cada vértice según el segundo vector.

Trasladamos cada vértice según el tercer vector.

$80.-


Año III - Número 4 - Febrero 2016

NOTAS DE GEOMETRÍA

Redactadas por los Doctores José Araujo, Guillermo Keilhauer y la Lic. Norma Pietrocola

TORNEO DE LAS CUENCAS

4 CUARTA NOTA

Prismas y pirámides

Introducción a la geometría del espacio. Herramientas y conceptos básicos. Simetrías, prismas, pirámides, secciones, área y volumen.

Problema 1 Hallar las medidas de las diagonales, tanto de sus caras como interiores de una caja de 3cmx4cmx5cm.

Nota: Es oportuno aclarar que las diagonales interiores son aquellos segmentos que unen dos vértices del paralelepípedo y que no se encuentran sobre las caras o aristas del mismo.

Solución

Como caras opuestas son iguales, sólo hay que ver las diagonales sobre una cara de cada par (los pares se indican en la figura).

Por otra parte, sobre cada cara las dos diagonales son iguales, porque las caras son rectángulos. Cada diagonal es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son aristas de la caja, tal como puede apreciarse en la figura.

Usando el Teorema de Pitágoras podemos establecer las longitudes de las d...

$$\sqrt{3^2+4^2} = 5, \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}, \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$$

$ 100.-

NOTAS DE GEOMETRÍA 5