Año III | - Número 4 - Febrero 2016

NOTAS DE GEOMETRÍA

Redactadas por los Doctores José Araujo, Guillermo Keilhauer y la Lic. Norma Pietrocola

TORNEO DE LAS CUENCAS

4 CUARTA NOTA

Prismas y pirámides

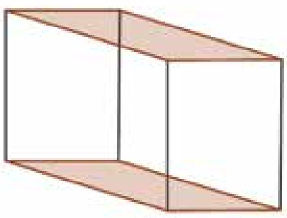
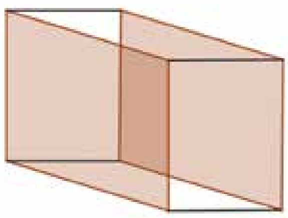
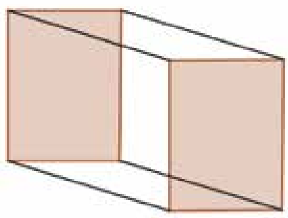
Introducción a la geometría del espacio. Herramientas y conceptos básicos. Simetrías, prismas, pirámides, secciones, área y volumen.

Problema 1 Hallar las medidas de las diagonales, tanto de sus caras como interiores de una caja de 3cm×4cm×5cm.

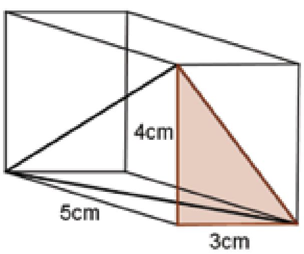
Nota: Es oportuno aclarar que las diagonales interiores son aquellos segmentos que unen dos vértices del paralelepípedo y que no se encuentran sobre las caras o aristas del mismo.

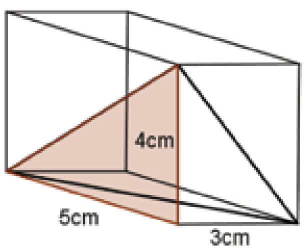
Solución

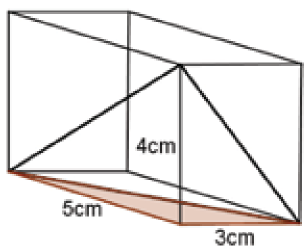
Como caras opuestas son iguales, sólo hay que ver las diagonales sobre una cara de cada par (los pares se indican en la figura).

Por otra parte, sobre cada cara las dos diagonales son iguales, porque las caras son rectángulos. Cada diagonal es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son aristas de la caja, tal como puede apreciarse en la figura.



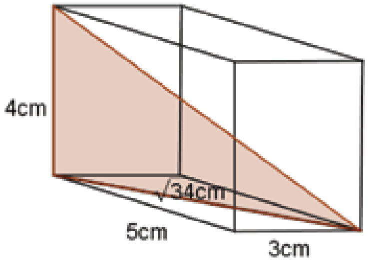


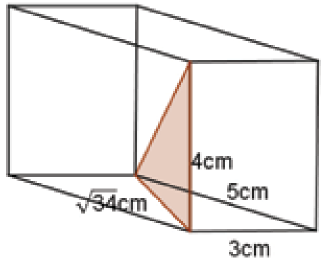


Usando el Teorema de Pitágoras podemos establecer las longitudes de las diagonales sobre las caras.

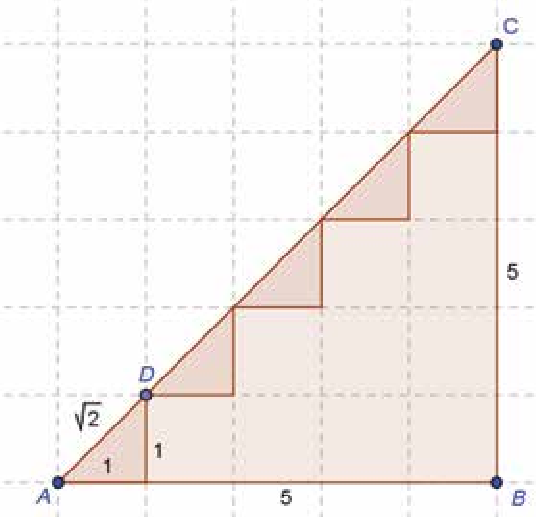
$$\sqrt{3^2+4^2}=5, \sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}, \sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$$

Resta calcular las longitudes de las diagonales interiores. Estas diagonales también son las correspondientes hipotenusas de triángulos rectángulos cuyos catetos miden 4cm y $\sqrt{34}$cm respectivamente.





Se concluye que la diagonal interior mide $\sqrt{50}\text{cm} = 5\sqrt{2}\text{cm}$. Esta última identidad puede visualizarse geométricamente mediante el Teorema de Pitágoras a partir de la siguiente figura, en donde $AB = BC = 5\text{cm}$, $AC = \sqrt{50}\text{cm}$ y $AD = \sqrt{2}\text{cm}$, siendo además $AC = 5AD = 5\sqrt{2}$.

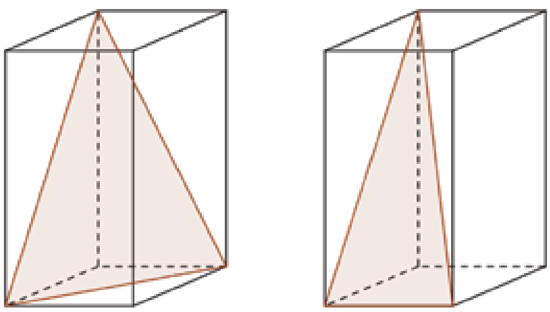


La identidad $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ mostrada geométricamente es un caso particular de una propiedad general de la radicación:

Si a y b son números positivos se verifica la identidad $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

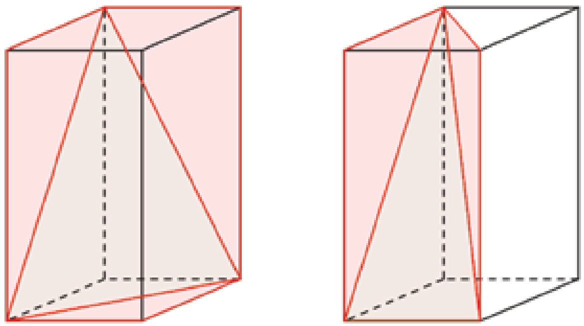
En nuestro caso $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5 \times \sqrt{2}$.

Problema 2 ¿Qué área tienen los triángulos de la figura en la caja cuya base es de 2cm×2cm y cuya altura es 4cm?

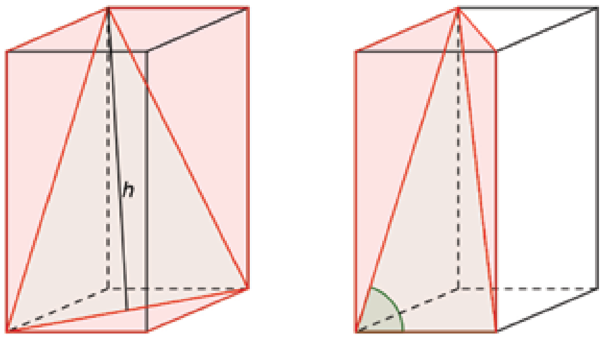


Solución

En el primer caso, los tres lados son hipotenusas de tres triángulos rectángulos destacados con rojo en la primera de estas figuras. En el segundo caso, los lados del triángulo son una arista de la caja y dos hipotenusas de los triángulos destacados con rojo en la segunda figura.



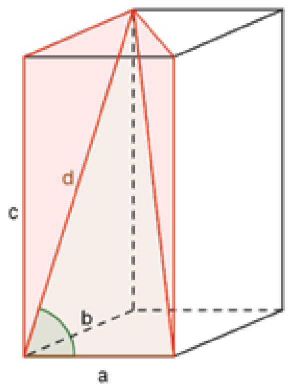
Por el Teorema de Pitágoras, dichos lados miden: en el primer caso $\sqrt{8}\text{cm}, \sqrt{20}\text{cm}, \sqrt{20}\text{cm}$, en el segundo caso $2\text{cm}, \sqrt{20}\text{cm}, \sqrt{24}\text{cm}$. El primer triángulo es isósceles, y la altura marcada en la figura, también por Pitágoras, mide $\sqrt{18}\text{cm}$.



En el segundo caso el ángulo marcado en la figura es recto. Ahora, las áreas son:

$$\frac{1}{2}\sqrt{8}\sqrt{18}\text{cm}^2 = 6\text{cm}^2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}2\sqrt{20}\text{cm}^2 = 2\sqrt{5}\text{cm}^2$$

Comentario: Se ha usado el hecho de que si una recta es perpendicular a dos rectas no paralelas de un plano, entonces es paralela a toda recta incluida en dicho plano. En la situación de la siguiente figura,



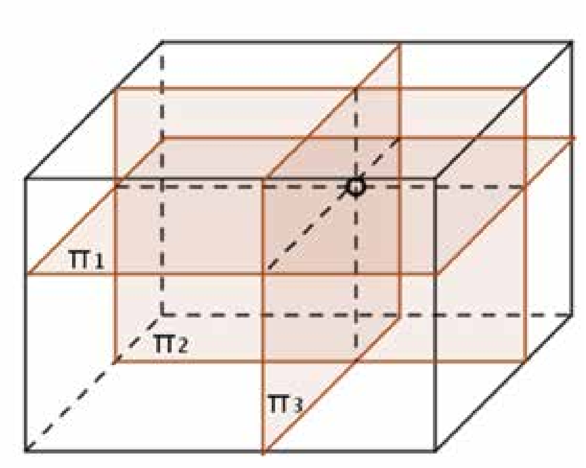
Dado que la arista a es perpendicular a las aristas b y c, resulta a perpendicular a la diagonal d. Por el mismo argumento, el otro triángulo marcado en rojo, es rectángulo.

Problema 3

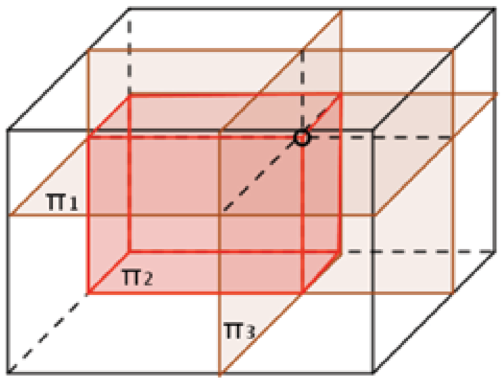
Por un punto en el interior de una caja se trazan planos paralelos a las caras de la caja. ¿En cuántas cajitas queda descompuesta esta caja?

Solución

Queda descompuesta en 8 cajitas. Esto puede visualizarse pensando que cada plano divide a la caja en dos regiones que podemos indicar: arriba-abajo para el plano π_1, adelante-atrás para el plano π_2 y derecha-izquierda para el plano π_3.



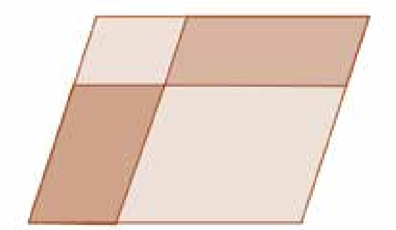
Por ejemplo, la terna abajo-atrás-izquierda indica la caja que se muestra en la figura:



Comentario: Lo mismo ocurre con cualquier otro paralelepípedo.

Problema 4

Observar que la suma de los perímetros de los cuatro paralelogramos en la figura, es igual al doble del perímetro del paralelogramo que los contiene:



Concluir cuánto suman las áreas de las cajitas del Problema 3 si el área de la caja es $10cm^2$.

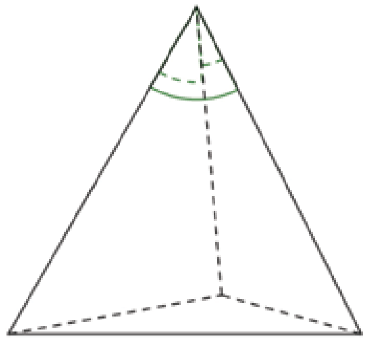
Solución

Las caras de las cajitas que están sobre las caras de la caja cubren la superficie de la misma, y también las caras de las cajitas en el interior de la caja pueden cubrir dicha superficie. Luego, las áreas de las cajitas suman $20cm^2$.

Problema 5 Cada tetraedro tiene un vértice tal que la suma de los tres ángulos que concurren en él (uno de cada cara) es menor o igual que 180°.

Solución

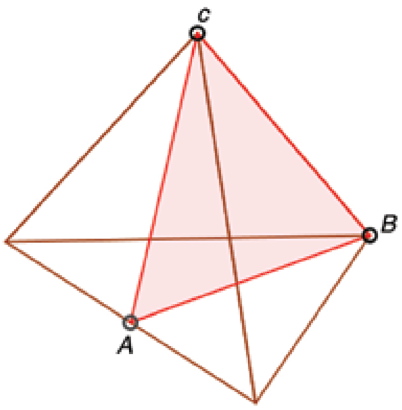
La suma de todos los ángulos en la caras de un tetraedro es 4×180°, entonces hay una suma en un vértice que es menor o igual que 180°, pues si las sumas en cada vértice superaran los 180°, la suma total superaría 4×180°.



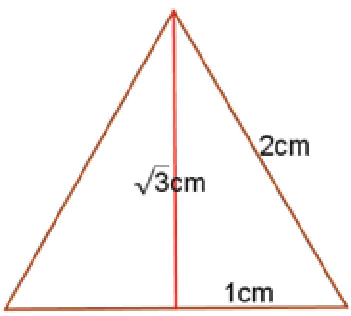
Problema 6 En un tetraedro regular de arista 2cm, se forma el triángulo *ABC* uniendo los vértices de una arista con el punto medio de la arista opuesta. ¿Cuál es el área y el perímetro de *ABC*?

Solución

Como puede apreciarse en la figura, los lados del triángulo son la arista *BC* del tetraedro y las alturas *AB* y *AC* de dos caras.

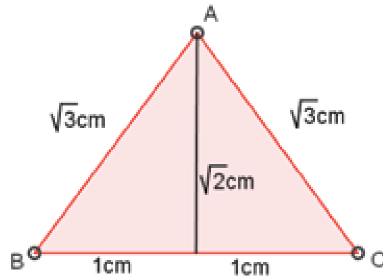


Por el Teorema de Pitágoras, la altura de una cara mide $\sqrt{3}$cm.



Luego el perímetro de *ABC* es $\left(2+2\sqrt{3}\right)$cm.

Por otra parte, para el cálculo del área evaluamos usando Pitágoras la altura correspondiente a la base BC del triángulo isósceles ABC, según muestra la figura.



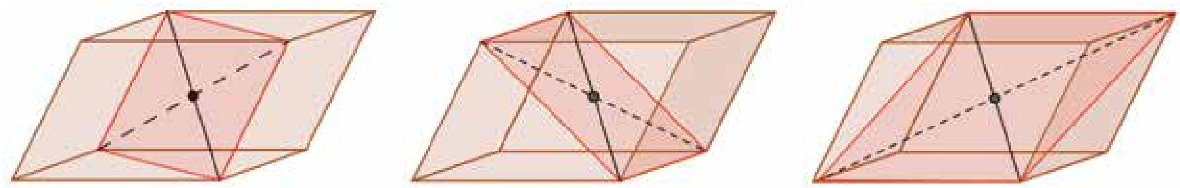
El área resulta $\sqrt{2}\text{cm}^2$.

Comentario: Para el cálculo del área, al conocerse los tres lados del triángulo, se podría usar la Fórmula de Herón, aunque en este caso por tratarse de un triángulo isósceles es más práctico usar Pitágoras.

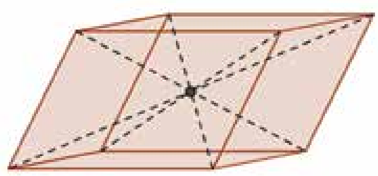
Problema 7 Muestre que las diagonales interiores de un prisma son concurrentes.

Solución

Hay cuatro diagonales interiores. Observemos que dos diagonales interiores son las diagonales de un paralelogramo. Hay seis de estos paralelogramos, tres de ellos mostramos en las figuras, y dejamos al lector encontrar los otros tres.



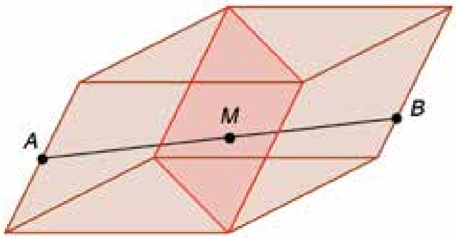
Los tres paralelogramos mostrados en las figuras precedentes tienen una diagonal común. Por el punto medio de esta diagonal, pasan las diagonales restantes. En consecuencia, las cuatro diagonales interiores concurren en sus puntos medios.



El punto de intersección de las diagonales interiores de un paralelepípedo se llama *centro del paralelepípedo*.

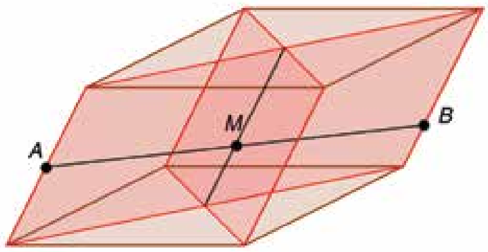
Comentario: En un paralelepípedo, aristas opuestas son paralelas. Esto es consecuencia de la transitividad del paralelismo. Esta propiedad, justifica que los cuadriláteros considerados en las figuras precedentes sean paralelogramos.

Problema 8 Si un segmento une puntos en aristas opuestas de un paralelepípedo, entonces el plano que contiene el par de aristas opuestas paralelas a las anteriores pasa por el punto medio de este segmento.



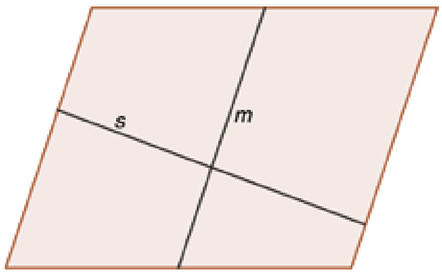
Solución

El plano en el enunciado del problema corta al paralelepípedo en un paralelogramo, como se aprecia en la figura precedente. Si trazamos el paralelogramo tal que dos de sus lados son las aristas que contienen los extremos *A* y *B* del segmento

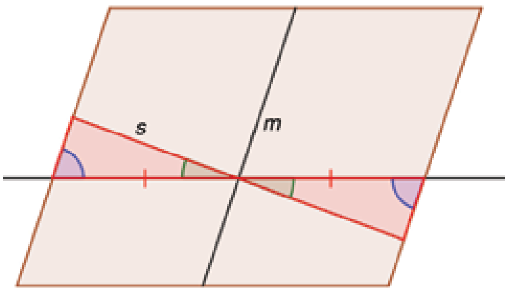


encontramos dos paralelogramos que se cortan en una línea media común. Esto ocurre porque lados opuestos de estos paralelogramos son las diagonales de la cara superior y de la cara inferior del paralelepípedo.

Finalmente, observemos que en un paralelogramo una línea media *m*, es decir el segmento que une puntos medios de lados opuestos, divide a cualquier segmento *s* con vértices en los lados opuestos paralelos a *m*, en dos segmentos de igual longitud.



Así es, trazando una paralela a los lados opuestos del paralelogramo por el punto de intersección de *m* y *s*, como muestra la figura,

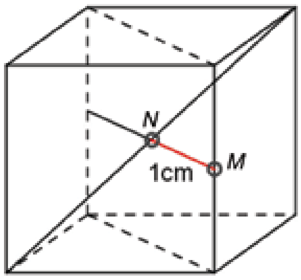


se forman dos triángulos iguales (igual lado y ángulos adyacentes). Esto muestra que *m* corta a *s* en su punto medio.

Problema 9 Desde el punto medio M de una arista de un cubo se traza una recta paralela a una diagonal de una cara del cubo. Esta recta corta a la diagonal interna del cubo en un punto N ubicado a 1cm del punto M. Hallar el volumen del cubo.

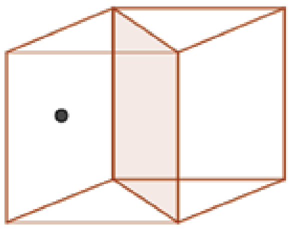
Solución

Dado el punto M como en la figura,



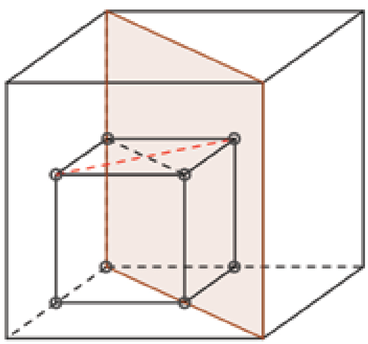
las únicas diagonales en las caras del cubo que responden al enunciado del problema son las marcadas en la figura, porque las paralelas por el punto M a las otras diagonales no ingresan al interior del cubo. En virtud del problema 8, el punto N es el centro del cubo. Resulta que las diagonales de las caras del cubo miden 2cm. Por el Teorema de Pitágoras, las aristas del cubo miden $\sqrt{2}$cm y así, su volumen es $2\sqrt{2}\text{cm}^3$.

Problema 10 En el cubo de la figura de 2cm de arista, ¿a qué distancia del plano indicado se encuentra el centro de la cara que muestra la figura?

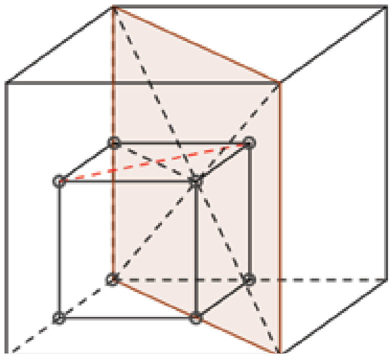


Solución

Con el centro del cubo, centros de caras, puntos medios de aristas y un vértice se puede formar un cubo cuya arista mide 1cm, como en la figura.



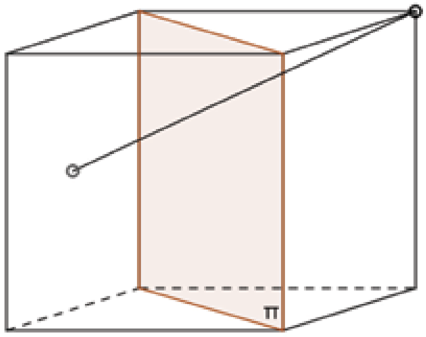
Una de las diagonales en la cara superior de este nuevo cubo, se encuentra en el plano dado, la otra es perpendicular a este plano. Para justificar la primera afirmación, vemos que el centro del cubo está en el plano, por ser intersección de dos diagonales interiores.



La segunda afirmación resulta del hecho que las diagonales del cuadrado, en la cara superior del nuevo cubo, son perpendiculares; además la diagonal distinguida con rojo es perpendicular a las aristas laterales de este cubo, dos de ellas están sobre el plano.

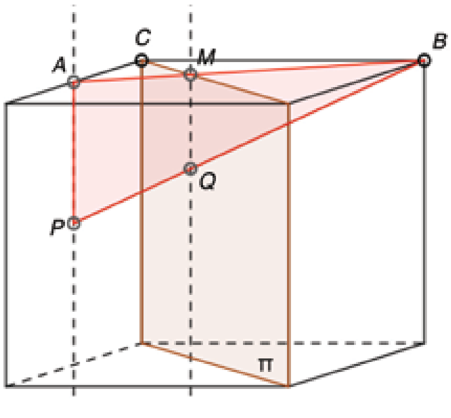
Resulta entonces que la distancia buscada desde el punto al plano es media diagonal del cuadrado considerado, es decir la distancia es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm.

Problema 11 Un segmento une el punto medio en una cara de un cubo con un vértice del mismo y un plano contiene dos aristas paralelas del cubo, como indica la figura. ¿En qué relación corta el plano al segmento?

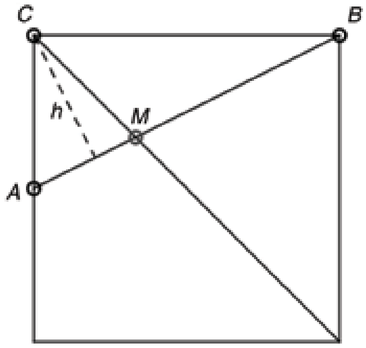


Solución

Si trazamos paralelas a las aristas laterales del cubo, por el centro de la cara y el punto de intersección del segmento con el plano, se pueden formar dos triángulos semejantes, *APB* y *MQB*, tal como ilustra la figura siguiente.



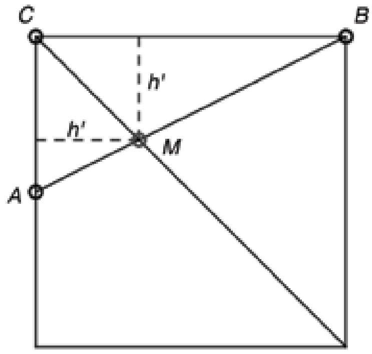
Notemos que el punto M pertenece a la recta intersección del plano π con la cara superior del cubo, que es la diagonal de esta cara que contiene al vértice C. Conociendo la relación de semejanza entre estos triángulos, conoceremos la relación en la que el plano corta al segmento. La siguiente figura describe la situación sobre la cara superior del cubo.



La relación buscada es $\dfrac{BQ}{QP}=\dfrac{BM}{MA}$. Teniendo en cuenta el cociente entre las áreas de los triángulos MBC y MCA,

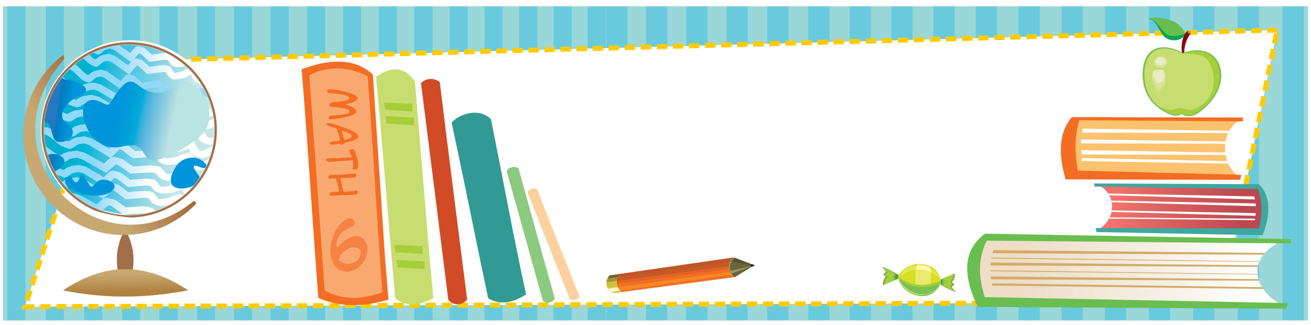
$$\frac{\frac{1}{2}hBM}{\frac{1}{2}hMA}=\frac{BM}{MA}$$

se obtendrá la relación buscada. Pero el cociente de las áreas también puede calcularse considerando otras alturas en los triángulos,



de modo que:

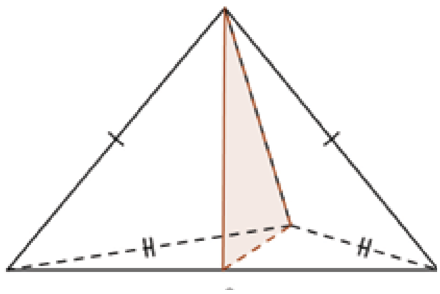
$$\frac{BM}{MA}=\frac{\frac{1}{2}BCh'}{\frac{1}{2}ACh'}=\frac{BC}{AC}=2$$



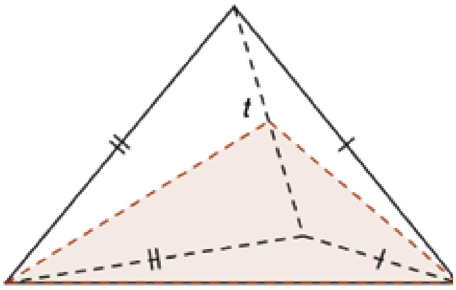
Problema 12 Si cada arista de un tetraedro se encuentra en el plano bisector de la arista opuesta, ¿cuánto miden los ángulos de sus caras?

Solución

En la figura, el triángulo muestra la sección del tetraedro con el plano bisector de la arista *s* ubicada en la parte inferior.

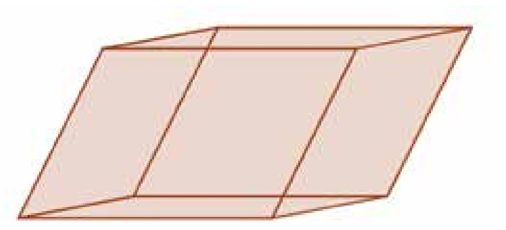


Las caras que concurren en la arista *s* son triángulos isósceles que tienen a *s* como base. Esto mismo ocurre con todas las aristas. Si consideramos la arista *t* opuesta a *s* en la parte posterior de la figura,



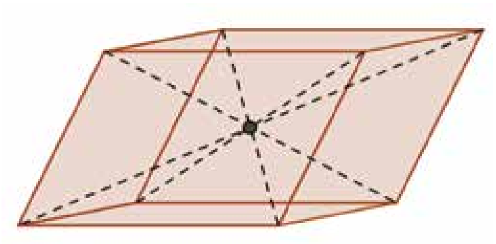
vemos otros triángulos isósceles. Observando ambas figuras, se concluye que todas las arista distintas de *s* y *t* deben ser iguales; como esta afirmación es válida para cada par de aristas opuestas, todas las aristas del tetraedro deben ser iguales, o sea que las caras son triángulos equiláteros. En consecuencia, los ángulos en las caras miden 60°.

Problema 13 ¿Hay un punto en el interior de un paralelepípedo que forme pirámides, con cada una de las caras del paralelogramo, todas del mismo volumen? ¿Como dibujaría tal punto en la siguiente figura?



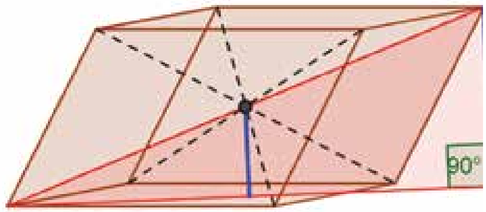
Solución

Sí, hay un punto y es el centro del paralelepípedo, punto de concurrencia de las diagonales interiores.



Como el centro queda a media altura, sin importar sobre qué cara se apoye el paralelepípedo, los volúmenes de cada una de estas pirámides serán iguales a $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo.

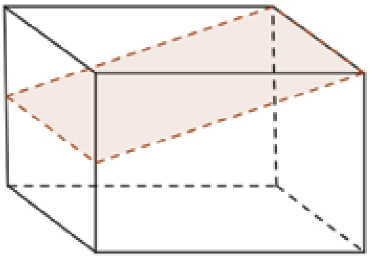
Resta justificar por qué el centro está a la mitad de la altura del paralelepípedo. Para esto consideramos el triángulo rectángulo cuyos vértices son: un par de vértices opuestos del paralelepípedo y el pie de la altura correspondiente a uno de estos vértices.



Dado que el centro del paralelepípedo es el punto medio de cualquiera de sus diagonales interiores, la altura correspondiente al centro es la base media que ilustra la figura del triángulo construido.

Problema 14

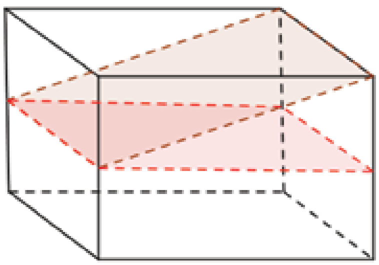
En una caja, inclinada respecto del plano horizontal, se han formado $15 cm^3$ de hielo alcanzando el borde de la caja en uno de sus extremos y la altura media en el extremo opuesto, según lo ilustra la figura con la caja reubicada en el plano horizontal.



¿Cuál es la capacidad de la caja?

Solución

El volumen ocupado por el hielo es la mitad del volumen de la caja más un cuarto del volumen de la caja, según se observa en la figura.

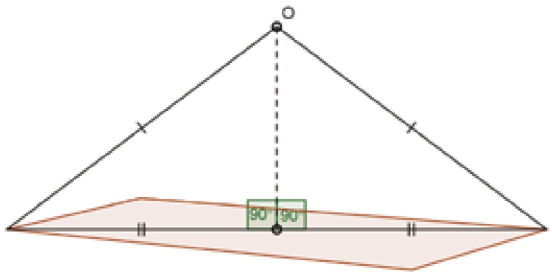


Es decir que 3/4 del volumen de la caja equivale a $15 cm^3$, luego la capacidad de la caja es $20 cm^3$.

Problema 15 Si todas las diagonales interiores de un paralelepípedo miden lo mismo, ¿cuánto miden los ángulos de sus caras?

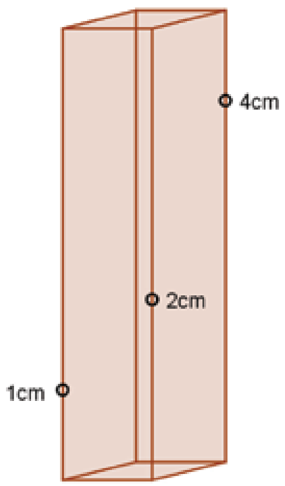
Solución

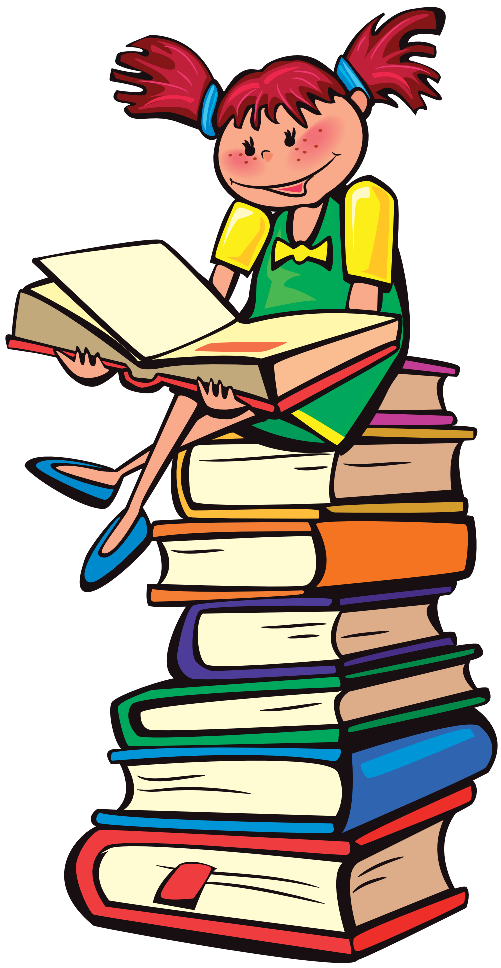
Todos los vértices del paralelepípedo están a la misma distancia del centro *O*, punto medio de las diagonales interiores. De manera que los vértices en una cara están a la misma distancia del pie de la perpendicular por *O* a dicha cara.



Resulta entonces que las caras son paralelogramos inscriptibles, es decir, las caras son rectángulos, y la respuesta al problema es que los ángulos son rectos.

Problema 16 Tres puntos se encuentran en aristas laterales de una caja de base cuadrada de 1cm de lado y de 5cm de altura. Los puntos están a 1cm, 2cm y 4cm de altura respectivamente. ¿A qué altura está el punto resultante de la intersección de la arista restante con el plano que pasa por estos tres puntos? ¿Cuánto miden el área y el perímetro de la sección de la caja por dicho plano?



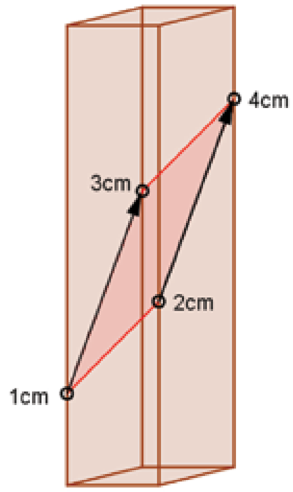


Solución

En primer lugar, notemos que:

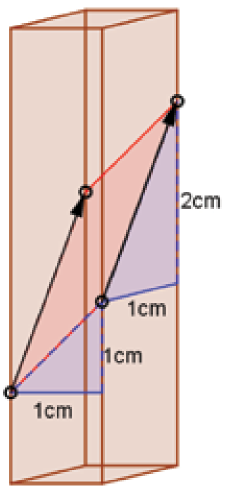
Un plano corta a dos planos paralelos en rectas paralelas.

El plano que pasa por los tres puntos cortará a la caja en un cuadrilátero cuyos pares de lados opuestos son paralelos entre sí. En consecuencia, dicho cuadrilátero es un paralelogramo.



Para conocer la altura del cuarto punto, observemos que si el segmento rojo, en la parte inferior, se desplaza hasta el segmento rojo, en la parte superior, la altura de sus puntos aumenta 2cm, de modo que la altura del cuarto punto es 3cm.

Usando el Teorema de Pitágoras, podemos conocer la medida de los lados del paralelogramo. Trazando paralelas a los lados de la base sobre las caras laterales como indica la figura,



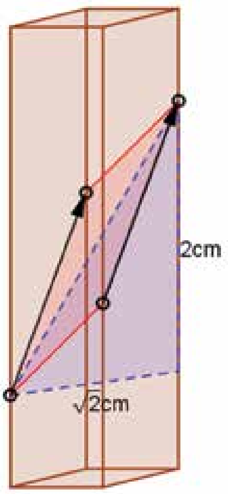
se forman triángulos rectángulos que tienen por hipotenusa a los lados del cuadrilátero. Luego los lados miden:

$$\sqrt{2}\,\text{cm},\ \sqrt{5}\,\text{cm}$$

Con esto tenemos que el perímetro es $2\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\text{cm}$.

En forma similar, podemos calcular las longitudes de sus diagonales y usar la Fórmula de Herón para hallar su área, descomponiendo el paralelogramo en dos triángulos iguales de los cuales conocemos las longitudes de sus lados.

Por ejemplo, la longitud de una de sus diagonales se obtiene por Pitágoras del triángulo rectángulo de catetos 2cm y $\sqrt{2}$cm como ilustra la figura:

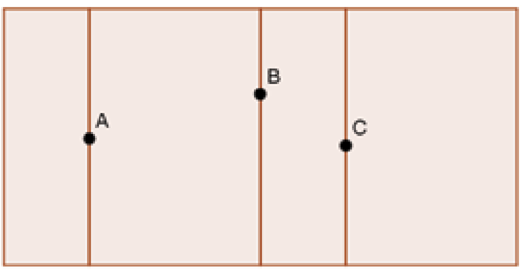


es decir, esta diagonal mide $\sqrt{6}$ cm

El área buscada es, dada por la fórmula de Herón:

$$2\sqrt{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{6}}{2}\times\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}{2}}\ \text{cm}^2$$

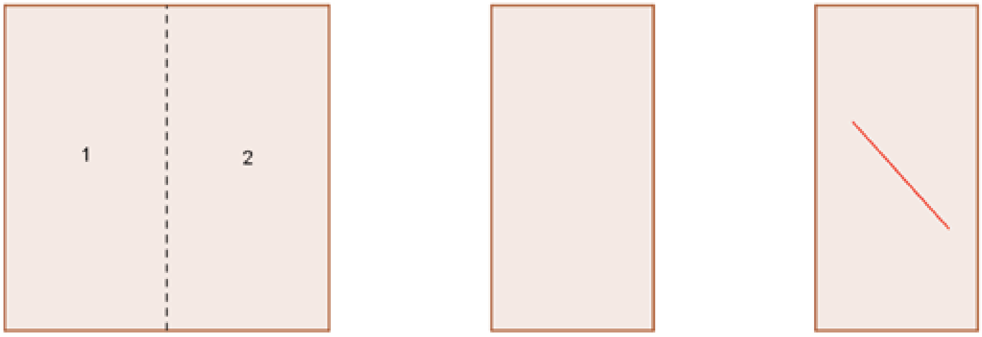
Problema 17 Un plano corta las aristas laterales de una caja con base rectangular en cuatro puntos *A, B, C* y *D*. La figura a continuación muestra el desarrollo de las caras laterales de la caja y tres de los puntos donde el plano corta a las aristas. Indicar dónde ubicar el punto restante.



Solución

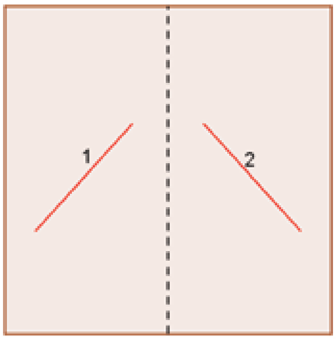
La sección de la caja por el plano es un paralelogramo. En dicho paralelogramo, el lado *AB* es paralelo al lado *CD*. En la figura, el lado *CD* se encuentra en la cara de la derecha, pero no es paralelo a *AB*. La razón es que la cara que en la figura del desarrollo contiene al lado *CD* está girada 180° alrededor de una arista lateral respecto de su posición en al caja. Para ver cómo se muestra un segmento sobre una hoja de papel después de girarla 180° alrededor de uno de sus lados, podemos hacer lo siguiente:

Doblamos una hoja de papel por una de sus líneas medias.

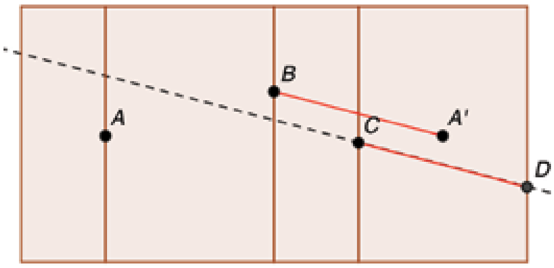


En la figura, la mitad de hoja marcada con 1 se plegó sobre la otra mitad marcada con 2 para verse como el segundo rectángulo de arriba. Sobre este rectángulo marcamos un segmento practicando un corte en ambas mitades (tercer rectángulo de arriba).

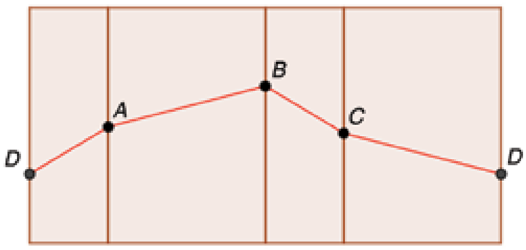
Al desplegar la hoja hasta su posición inicial, los segmentos se verán simétricos respecto de la línea de plegado.



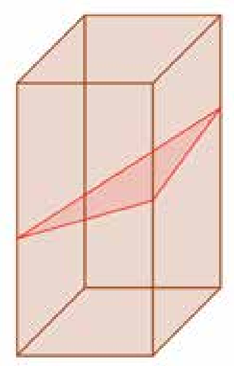
Para resolver el problema, marcamos *A'* el punto simétrico de *A* respecto de la recta que contiene a la arista lateral que pasa por *B*. Por el punto *C* trazamos una recta paralela al segmento *BA'*, sobre esta recta se encuentra el segmento *CD*.



Ahora podemos dibujar el borde del paralelogramo.

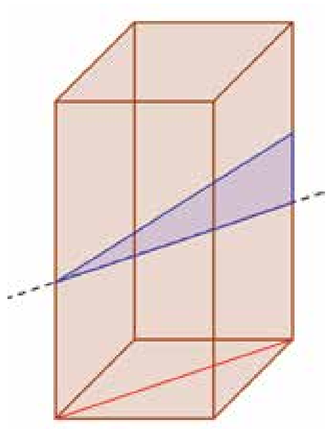


Problema 18 Los vértices de un triángulo están sobre las aristas laterales de una caja de base cuadrada de 10cm de lado. Los lados del triángulo miden 12cm, 13cm y 15cm. Hallar el perímetro y el área de la sección de la caja obtenida con el plano determinado por el triángulo.



Solución

Naturalmente, la sección es un paralelogramo del cual el triángulo es una mitad. Uno de los lados del triángulo se encuentra en el interior de la caja. Este lado es la hipotenusa de un triángulo que tiene por cateto a un segmento paralelo a una diagonal de la base de la caja, como muestra la figura.



La medida de dicha hipotenusa es mayor que la longitud de la diagonal de la base, es decir mayor que $\sqrt{200} = 10\sqrt{2} = 14{,}41$. Resulta que el lado del triángulo en el interior de la caja es el que mide 15cm, en consecuencia, el perímetro de la sección es 2(13 + 12)cm = 50cm.

Para hallar el área del triángulo, usamos la Fórmula de Herón.

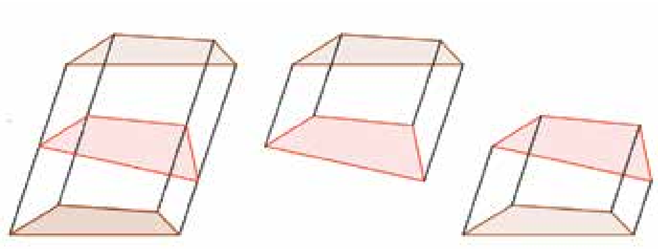
$$\sqrt{20 \times \left(20-12\right)\left(20-13\right)\left(20-15\right)} = \sqrt{20 \times 8 \times 7 \times 5} = 20\sqrt{14}$$

En consecuencia, el área del paralelogramo es $40\sqrt{14}\text{cm}^2$.

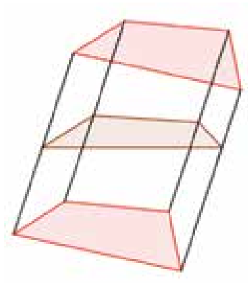
Problema 19 Se tiene un prisma cuya base es un cuadrilátero y la intersección del mismo con un plano es un paralelogramo. ¿Qué clase de cuadrilátero es la base del prisma?

Solución

Es un paralelogramo. En efecto, al seccionar un prisma con un plano, quedan dos cuerpos.



Con estos cuerpos se puede formar otro prisma cuyas bases son las figuras de la sección y las bases del prisma original se unen para formar una sección en este nuevo prisma. Notar que esta construcción intercambia los roles de base y sección.



De modo que, si la sección inicial es un paralelogramo, las bases originales también son paralelogramos, por ser éstas una sección de un paralelepípedo.

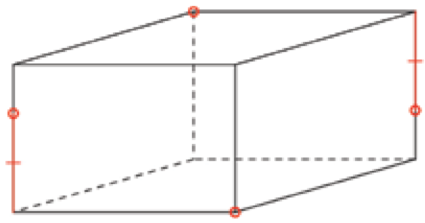
Aclaración: Las caras laterales de un paralelepípedo están en planos paralelos, luego todo plano las secciona en segmentos paralelos. Por esta razón, las secciones del paralelepípedo con un plano que corte sus caras laterales son paralelogramos.

Problema 20 Un paralelepípedo de 200g es seccionado por un plano que contiene dos vértices opuestos. ¿Cuánto pesa cada parte?

Solución

100g, porque el plano contiene al centro del paralelepípedo que es el punto medio de dos vértices opuestos (ver apéndice).

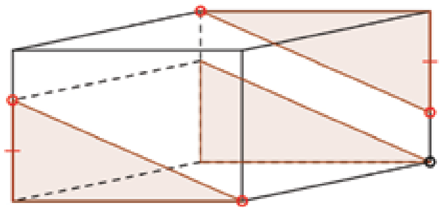
Problema 21 Los segmentos destacados en las aristas de la caja son de igual longitud.



¿Qué clase de figura tiene por vértices a los cuatro puntos indicados?

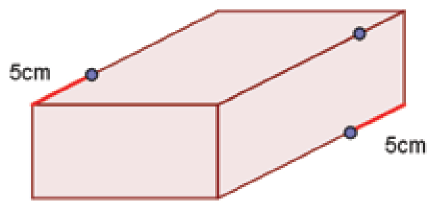
Solución

Si trazamos una paralela a las aristas, como se indica en la figura, y observamos los triángulos rectángulos iguales, encontramos que dos lados de esta figura son segmentos paralelos e iguales.



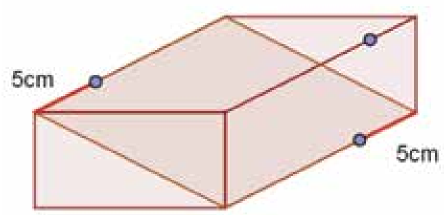
Esto indica que los cuatro puntos determinan una figura plana, más precisamente, un cuadrilátero con un par de lados paralelos e iguales. En consecuencia, se trata de un paralelogramo.

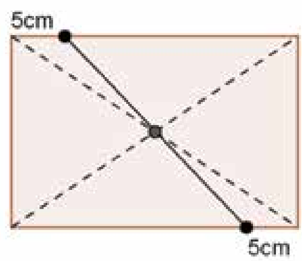
Problema 22 Un ladrillo de 2kg será cortado en dos piezas por el plano que determinan los tres puntos indicados en la figura. Hallar el peso de cada pieza.



Solución

La sección en la figura es un rectángulo cuyas diagonales son dos diagonales interiores del ladrillo.





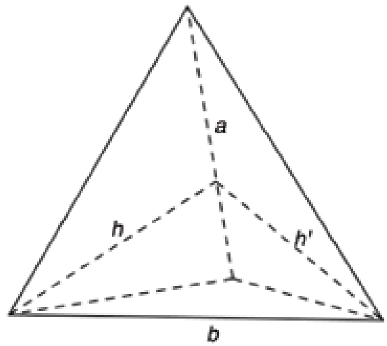
El punto medio de los puntos marcados a 5cm de un vértice es el centro del ladrillo. Entonces, el plano pasará por el centro y cada pieza pesará 1kg.

NOTAS DE GEOMETRÍA 4

Problema 23 Si las alturas en dos caras distintas de un tetraedro tienen un mismo pie, mostrar que hay dos aristas opuestas que son perpendiculares.

Solución

Si las alturas *h* y *h'* son concurrentes, como se indica en la figura,

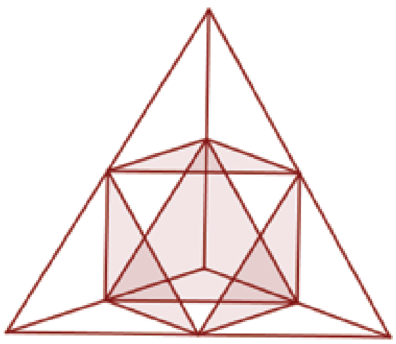


la arista *a* es perpendicular al plano determinado por *h* y *h'*; como este plano contiene a la arista opuesta *b*, *a* y *b* son aristas perpendiculares.

Problema 24 Los puntos medios de las aristas de un tetraedro regular de $8cm^3$ se usan como vértices de un poliedro. ¿Cuál es el volumen del poliedro? ¿Cuál es la relación entre el área de la superficie del tetraedro y el área de la superficie de este poliedro?

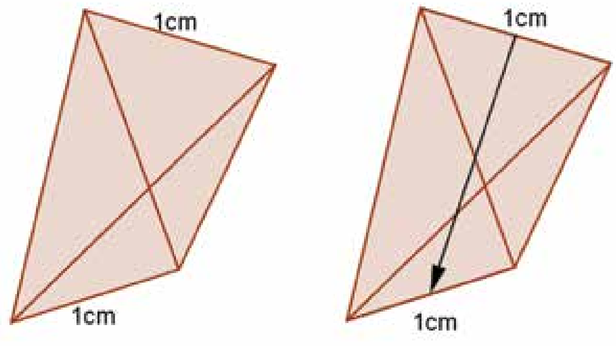
Solución

Para obtener dicho poliedro, es preciso seccionar el tetraedro por planos paralelos a las caras que pasen por puntos medios de las aristas, como lo indica la figura.



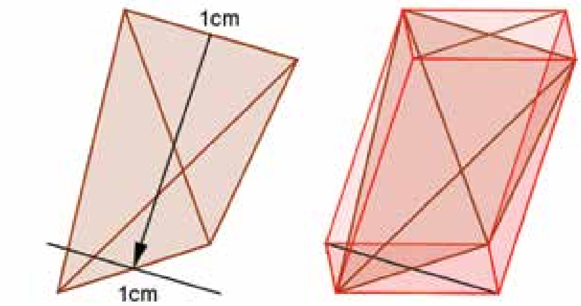
Es decir que del tetraedro se retiran cuatro tetraedros regulares cuyas aristas miden la mitad del valor de la arista del tetraedro considerado, y en consecuencia cada uno de estos tetraedros tiene 1/8 de volumen total. El volumen del poliedro es $4cm^3$. La figura resultante es un *octaedro regular*, formado por 8 caras que son triángulos equiláteros. Por otra parte, como puede apreciarse en la figura, la superficie del tetraedro puede cubrirse con 16 de estos triángulos, de manera que la relación buscada es 2:1.

Problema 25 Si dos aristas opuestas de un tetraedro miden **1cm** y son perpendiculares, mostrar que el tetraedro puede pasar por un agujero cuadrado cuya área es $\frac{1}{2}$cm^2.



Solución

Consideramos el paralelepípedo circunscripto que contiene al tetraedro cuya base se obtiene trasladando una arista hasta hacer coincidir su punto medio con el punto medio de la arista opuesta (ver apéndice).

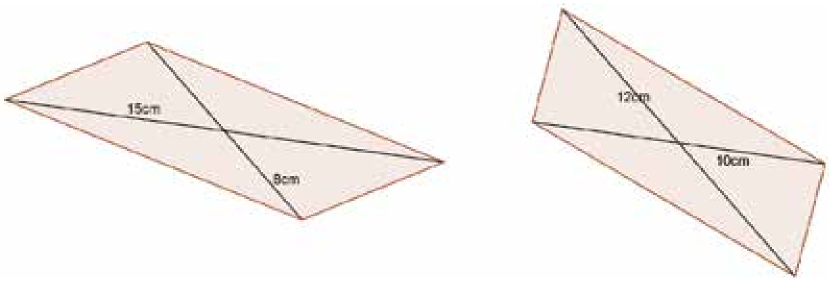


Como las aristas opuestas son las diagonales de la base del paralelepípedo, en la situación de problema, esta base será un cuadrado de diagonal 1cm, es decir de lado $\frac{1}{\sqrt{2}}$cm. Luego, el paralelepípedo, y en consecuencia el tetraedro, pueden ser desplazados por un agujero cuadrado de $\frac{1}{2}$cm^2 de área.

Problema 26 Un tetraedro con aristas de 8cm y 15cm sobre las rectas alabeadas *l* y *m* respectivamente, tiene un volumen de 60cm^2. ¿Qué volumen tendrá un tetraedro con aristas de 10cm y 12cm sobre las rectas alabeadas *l* y *m* respectivamente?

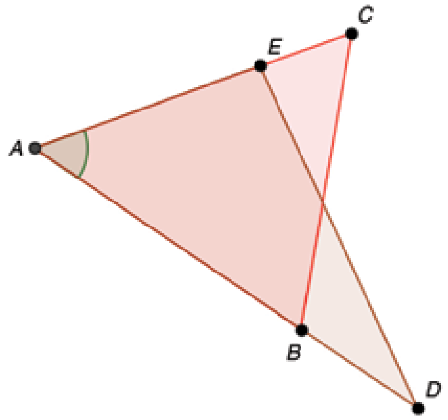
Solución

Los paralelepípedos circunscriptos asociados a estos tetraedros tendrán una altura común igual a la distancia entre las rectas *l* y *m*. Las bases de los mismos son cuadriláteros con sus diagonales paralelas.



Para conocer el área del paralelogramo cuyas diagonales miden 10cm y 12cm, observemos lo siguiente.

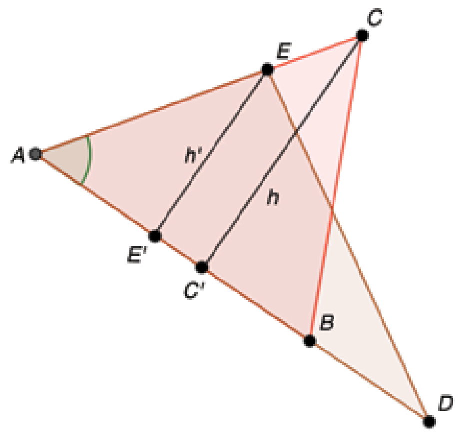
Si los triángulos *ABC* y *ADE* comparten el ángulo en el vértice *A*,



entonces la razón entre sus áreas es igual a la razón entre el producto de los lados que tienen al vértice *A*, es decir:

$$\frac{\text{área } ABC}{\text{área } ADE} = \frac{AB \times AC}{AD \times AE}$$

Esta afirmación puede comprobarse si se consideran las alturas *h* y *h'*.



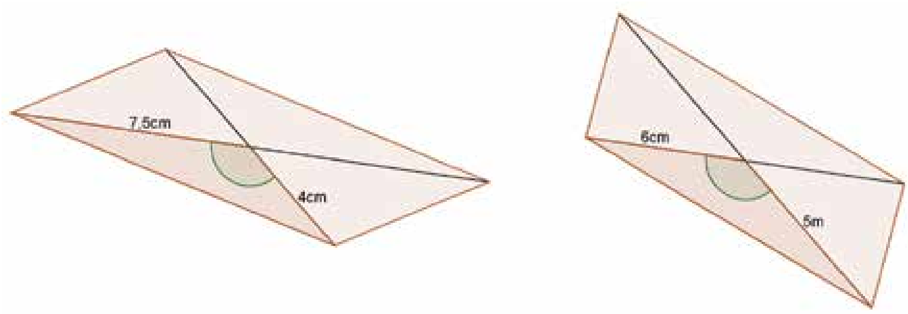
Por semejanza de los triángulos *AEE'* y *ACC'* resulta

$$\frac{h'}{h} = \frac{EA}{CA}$$

Luego, la razón entre las áreas es

$$\frac{\frac{1}{2} AB \times h}{\frac{1}{2} AD \times h'} = \frac{AB}{AD} \times \frac{h}{h'} = \frac{AB \times AC}{AD \times AE}$$

Dos de los triángulos que forman los paralelogramos están en esta situación, midiendo sus lados 5cm y 6cm en uno de ellos y 4cm y 7,5cm en el otro.



La razón entres sus áreas será:

$$\frac{5\times 6}{4\times 7{,}5}=1$$

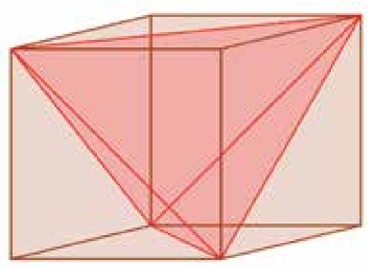
Como estos triángulos tienen igual área, los paralelogramos también. En consecuencia, ambos tetraedros tienen el mismo volumen, es decir 60cm^3.

Problema 27

¿Cuál es el volumen de un tetraedro regular formado con vértices de un cubo de volumen 1cm^3?

Solución

Es conveniente observar que hay sólo dos maneras de obtener el tetraedro. Esto es, tomando diagonales de las caras del cubo como aristas del tetraedro. La razón de este hecho es la siguiente: fijado un vértice del cubo para formar un tetraedro regular, son necesarios tres vértices más que estén a la misma distancia tanto de este vértice como entre ellos. La solución se obtiene trazando desde el punto fijado las diagonales sobre las caras del cubo que concurren en dicho punto.



De esta manera, el cubo es el paralelepípedo circunscripto al tetraedro; en consecuencia, el volumen del tetraedro es $\frac{1}{3}\text{cm}^3$.

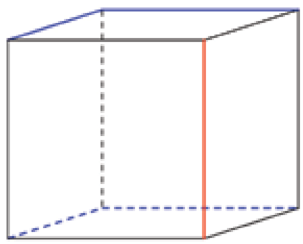
Problema 28

Los vértices de dos aristas de un cubo de 1cm de arista son los vértices de un tetraedro. Hallar las medidas de las aristas, el área y el volumen de este tetraedro.

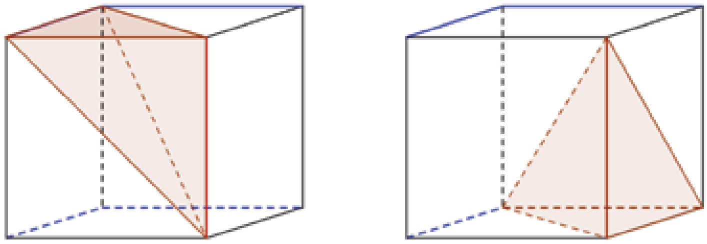
Solución

Este par de aristas no están en una misma cara y no pueden ser paralelas, ya que en cualquiera de estos casos las aristas son coplanares y sus vértices no pueden dar lugar a un tetraedro.

En la figura, se destaca una arista en color rojo. Las aristas marcadas con azul son las que pueden aparearse con la roja para formar un tetraedro.

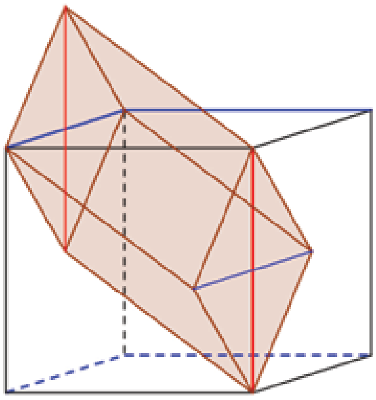


Dibujamos un par de estos tetraedros.



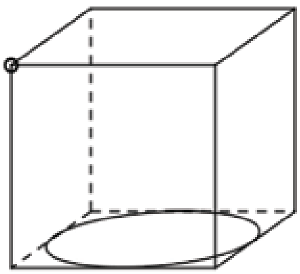
Podemos apreciar que ambos tienen las mismas dimensiones, es decir: tres aristas miden 1cm, dos aristas miden $\sqrt{2}$cm y una arista mide $\sqrt{3}$cm. Todas las caras son triángulos rectángulos, cuyas áreas son $\frac{1}{2}\text{cm}^2$, $\frac{1}{2}\text{cm}^2$, $\frac{\sqrt{2}}{2}\text{cm}^2$, $\frac{\sqrt{2}}{2}\text{cm}^2$ de modo que el área de los tetraedros es $\left(1+\sqrt{2}\right)\text{cm}^2$.

Finalmente, el paralelepípedo circunscripto al primer tetraedro es un prisma de base cuadrada, cuya diagonal mide 1cm, y de 1cm de altura, dado que sus bases están en los planos determinados por dos caras opuestas del cubo.



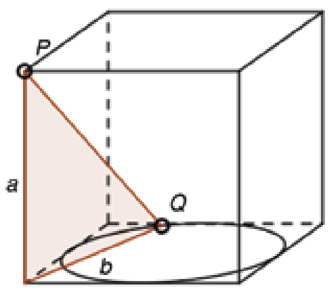
Como este prisma tiene volumen $\frac{1}{2}\text{cm}^3$, se concluye que el volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}\text{cm}^3$.

Problema 29 Hallar la mayor y menor distancia desde el vértice del cubo en la figura a los puntos de la circunferencia inscripta en la cara de la base del cubo.



Solución

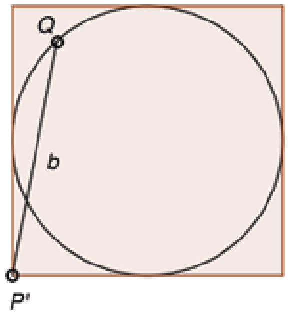
Teniendo en cuenta el triángulo rectángulo de catetos *a* y *b* dado en la figura,



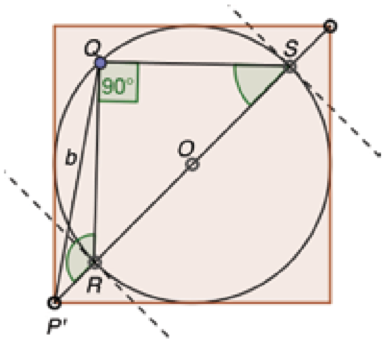
la distancia desde el punto P a un punto Q en la circunferencia es:

$$\sqrt{a^2+b^2}$$

Como a es el mismo valor cualquiera que sea Q, tendremos que ver cuándo b toma el mayor valor o menor valor. Pero esto lo vemos en la base,

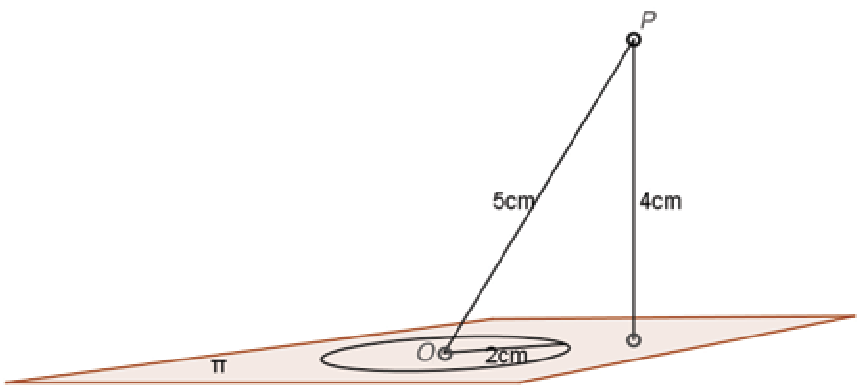


En la figura, P' es el pie de la perpendicular a la cara de la base del cubo que pasa por P. Si trazamos el segmento que une P' con el centro O de la circunferencia inscripta en la cara de la base del cubo,



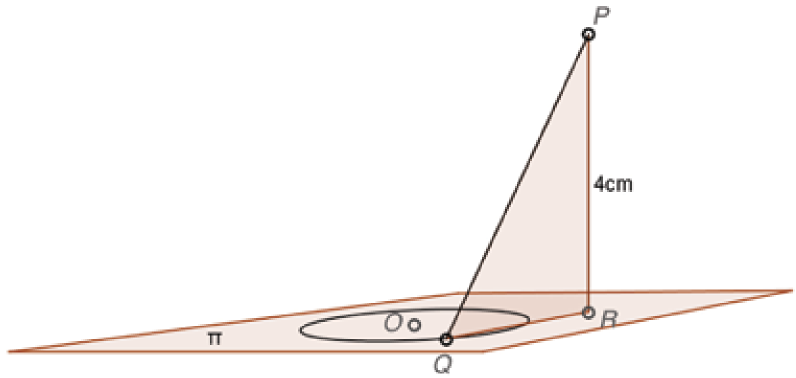
este segmento corta a la circunferencia en los puntos R y S. Los ángulos $P'RQ$ y $P'QS$ son mayores que 90°. Teniendo en cuenta que en un triángulo a mayor ángulo se le opone mayor lado, en el triángulo $P'RQ$ el lado mayor es $P'Q$ y en el triángulo $P'SQ$ el mayor lado es $P'S$, de manera que la longitud de $P'R$ es menor o igual que b, y la longitud de $P'S$ es mayor o igual que b, independientemente de la posición de Q. En conclusión, la distancia mínima será la distancia desde P a R, y la distancia máxima será la de P a S.

Problema 30 Un punto P se encuentra a 4cm de distancia de un plano π y a 5cm de distancia del centro de una circunferencia de radio 2cm que se encuentra en el plano π. Determinar la distancia máxima y la distancia mínima desde P a los puntos de la circunferencia.



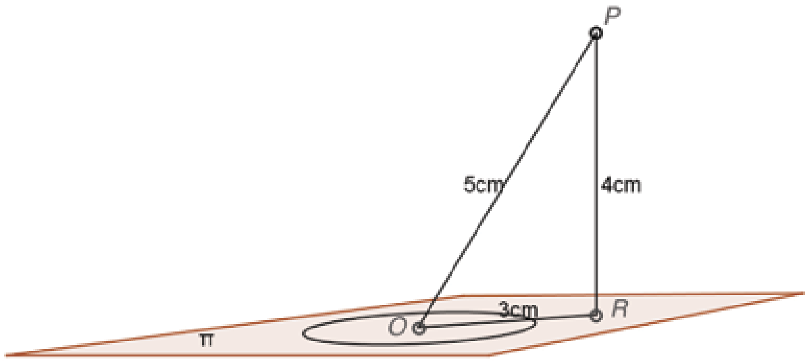
Solución

La distancia desde P hasta un punto Q sobre la circunferencia es la longitud de la hipotenusa PQ del triángulo rectángulo PRQ, donde R es el pie de la perpendicular al plano π que pasa por P.

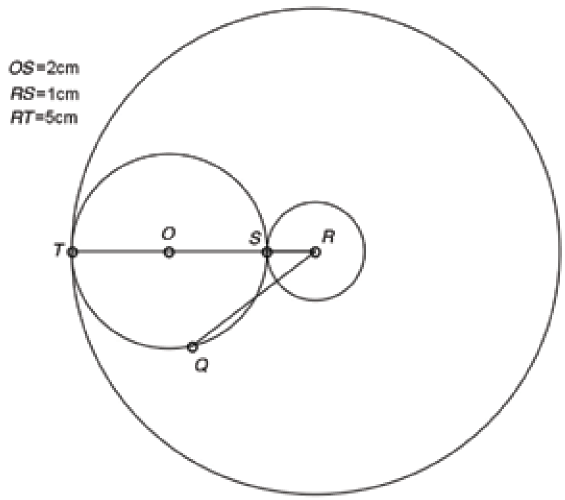


La longitud de la hipotenusa PQ aumentará o disminuirá conforme aumente o disminuya la longitud del segmento RQ. Para analizar los valores que puede tomar la longitud de PQ, nos limitamos a observar la situación sobre el plano π.

En primer lugar, por el Teorema de Pitágoras, vemos que la distancia entre R y el centro O de la circunferencia es 3cm.



La situación sobre el plano π se ilustra en la siguiente figura.



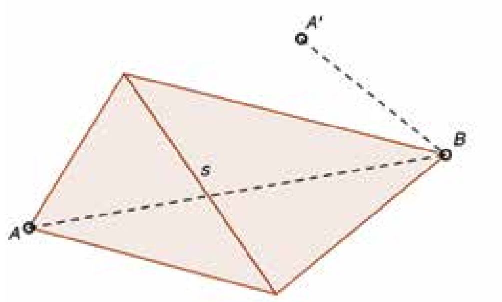
Si con centro en R trazamos una circunferencia de radio 1cm y otra de radio 5cm, se forma una corona que contiene a la circunferencia con centro O y radio 2cm, de modo que la longitud de QR es mayor o igual que la de SR, o sea 1cm, y menor o igual que la de TR, o sea 5cm. Resulta entonces que la distancia entre P y Q es mayor o igual que $\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$ y menor o igual que $\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$.

Comentario: En este problema se ha establecido el siguiente resultado.

Las distancias, máxima y mínima, desde un punto P del espacio a los puntos de una circunferencia C, pueden obtenerse como se detalla a continuación: se toma el pie P' de la perpendicular por P al plano de C. La recta que une P' con el centro de la circunferencia determina un diámetro AB de la misma. Las distancias buscadas son las distancias entre P y A y entre P y B.

Problema 31

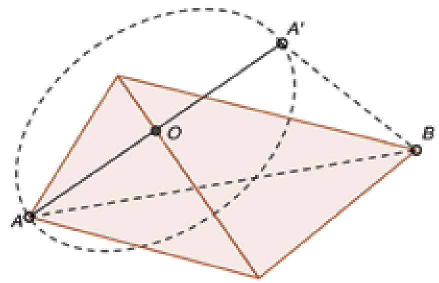
Los triángulos en la figura son dos caras de un tetraedro desarrolladas sobre un plano; el punto *A'* es el simétrico del vértice *A* respecto de la recta que determina la arista común de ambos triángulos.



Mostrar que la medida de la sexta arista del tetraedro es mayor que la longitud de *A'B* y menor que la longitud de *AB*.

Solución

Al plegar el triángulo del vértice *A* por la línea de la arista común *s* para formar el tetraedro, el vértice *A* se mueve sobre la circunferencia en el plano perpendicular a *s* y que tiene por diámetro al segmento *AA'*.



Como el diámetro *AA'* y la arista *s* determinan un plano que contiene a *B*, las distancias desde *B* a los puntos de la circunferencia distintos de *A* y *A'* son mayores que la longitud de *A'B* y menores que la longitud de *AB*.

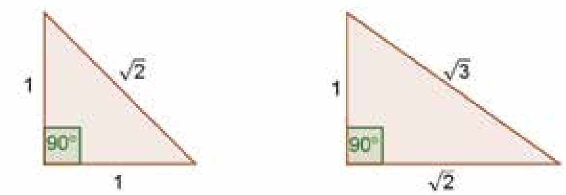
Problema 32

Las caras de un tetraedro son triángulos rectángulos y sus aristas toman uno de los valores $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. Hallar el área y el volumen del tetraedro. ¿Cuántas clases de estos tetraedros hay? ¿Con seis de estos tetraedros se puede armar un cubo?

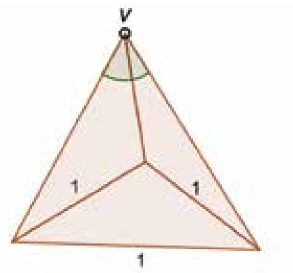
Nota: En este problema omitimos escribir las unidades de medida para no sobrecargar la presentación de las figuras.

Solución

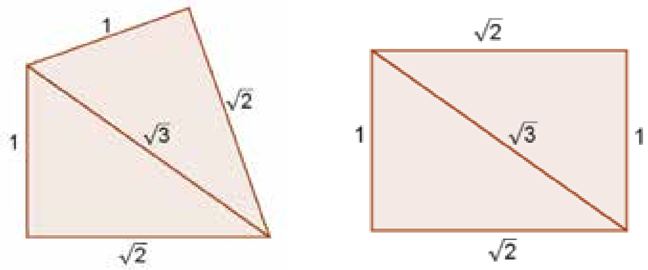
Según el Teorema de Pitágoras, las caras posibles del tetraedro son:



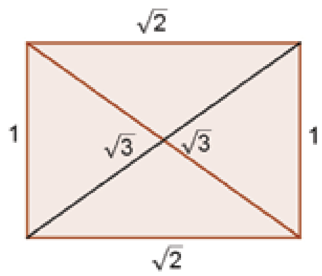
Si las caras fueran todas del primer tipo, los ángulos en las caras del tetraedro serían de 90° o 45°. Como la suma de los ángulos de las caras concurrentes en algún vértice v es menor o igual que 180° (ver Problema 5), en este vértice los ángulos serán de 90°, 45° y 45° respectivamente o bien los tres iguales a 45°. Pero la suma de dos de estos ángulos debe superar al restante (ver tetraedro en el apéndice) que en el primer caso no ocurre. En el segundo caso, los lados opuestos a un ángulo de 45° toman el valor 1, de modo que las aristas opuestas al vértice v tomarían todas el valor 1 y la cara opuesta a v sería un triángulo equilátero.



Si las caras fueran todas del segundo tipo, dos de ellas se unen por una arista que toma el valor $\sqrt{3}$, hay dos casos como se muestra en la figura.

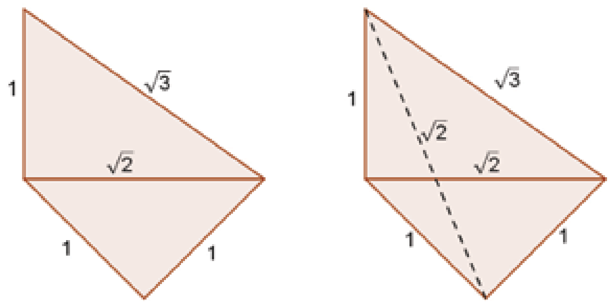


El primer caso daría lugar a caras isósceles del tetraedro con dos lados iguales a 1 o dos lados iguales a $\sqrt{2}$. En el segundo caso, la arista restante debe tomar el valor $\sqrt{3}$.

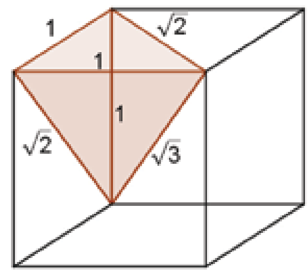


Pero esto no es posible por el Problema 31.

En consecuencia, debe haber al menos una cara de cada tipo. Si pegamos una cara de cada tipo por su arista de valor $\sqrt{2}$, encontramos que la sexta arista, indicada en línea punteada sobre la figura, debe tomar el valor $\sqrt{2}$.



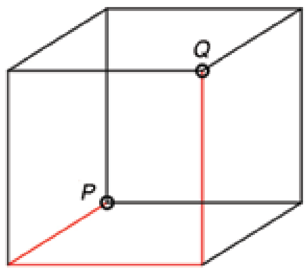
Podemos observar que estos valores de las aristas corresponden a aristas y diagonales de un cubo de arista 1, de tal manera que el tetraedro buscado puede construirse con cuatro vértices de un cubo, como se muestra en la figura



El área del tetraedro es

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$$

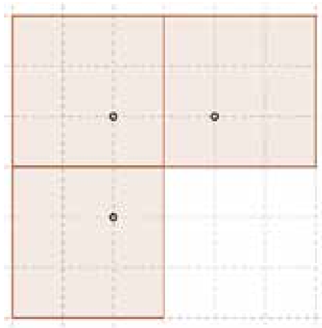
En cuanto al volumen, notemos que cada camino por las aristas del cubo que une un vértice P del cubo con el vértice opuesto Q, da lugar a un tetraedro de esta clase.



Puede observarse que hay 6 de estos caminos, los que producen una descomposición del cubo en 6 tetraedros idénticos. En consecuencia, el volumen del tetraedro buscado es $\frac{1}{6}$.

Propuesta: Construya 6 tetraedros de esta clase en cartulina y únalos para formar un cubo.

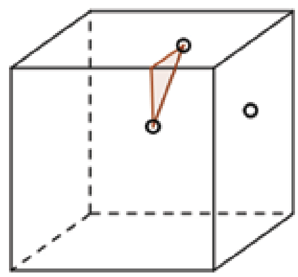
Problema 33 Tres caras concurrentes de un cubo están representadas por la siguiente figura:



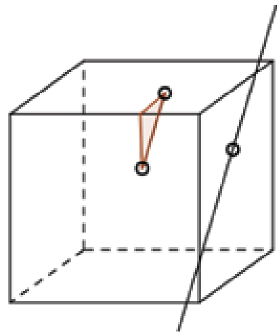
Dibujar los lados del triángulo que se obtiene seccionando el cubo con el plano que pasa por los tres puntos marcados.

Solución

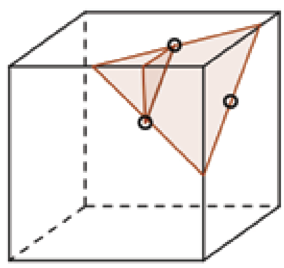
El triángulo dado en la figura, con lados paralelos a las aristas y que tiene a dos de los puntos dados como vértices,



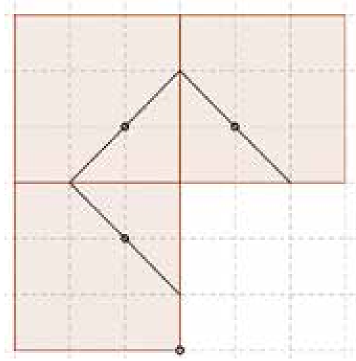
es rectángulo e isósceles. Trazando una paralela a la hipotenusa de este triángulo por el punto restante se obtiene una recta en el plano determinado por los tres puntos dados.



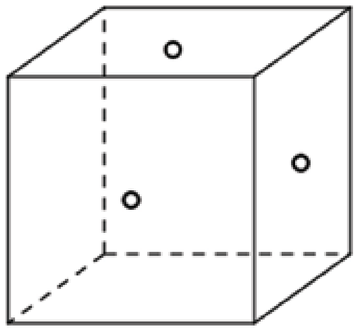
Haciendo lo mismo sobre los otros puntos encontramos un triángulo en el plano de sección que tiene a los puntos dados como puntos medios de sus lados.



Ahora podemos dibujar los lados del triángulo

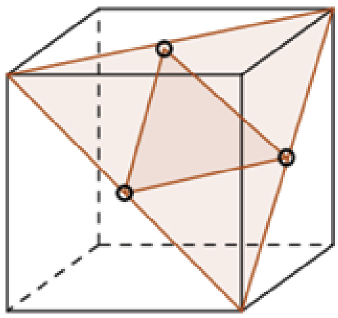


Problema 34 El plano que pasa por tres centros de caras, dos a dos vecinas, de un cubo de arista 1cm, secciona al cubo en una determinada figura. Determinar esta figura, su área y su perímetro.



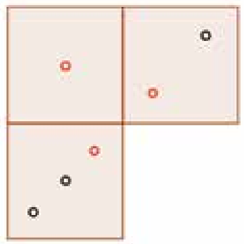
Solución

El triángulo formado por estos tres centros es el triángulo de puntos medios del triángulo dado por tres vértices del cubo, como se muestra en la figura.



Como ambos triángulos determinan el mismo plano, la figura de la sección es el triángulo equilátero de lado $\sqrt{2}$cm, de perímetro $3\sqrt{2}$cm y de área $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$cm.

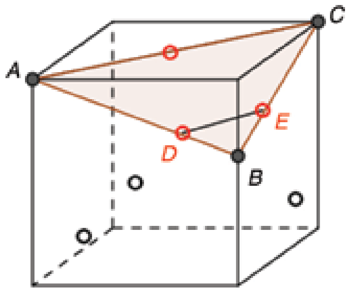
Problema 35 Tres caras de un dado están representadas por la siguiente figura:



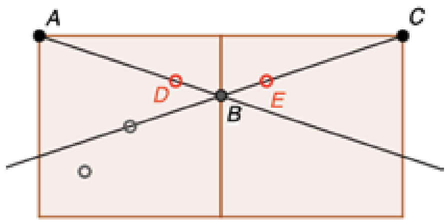
¿Se obtiene un triángulo al seccionar el cubo con el plano que pasa por los puntos indicados con rojo?

Solución

Si trazamos la diagonal *AC* y las semirrectas *AD* y *CE* se forma el triángulo *ABC*, como muestra la figura.

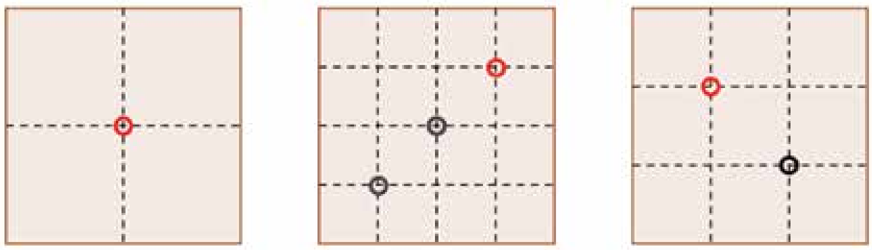


Para justificar que las semirrectas concurren en el punto *B*, sobre la arista del cubo, basta observar el desarrollo de las dos caras involucradas, donde los puntos *D* y *E* son simétricos respecto de la arista que contiene a *B*.



La sección en cuestión es precisamente el triángulo *ABC*.

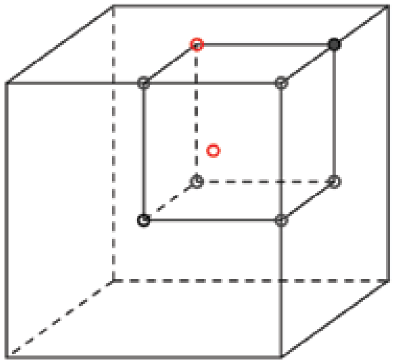
Comentario: Se ha considerado que los puntos marcados con rojo en las caras del dos y del tres están a la misma altura. Esto no ocurre en un dado real, donde el punto sobre la cara del dos estará a los $\frac{2}{3}$ *de la altura, mientras que el otro punto, sobre la cara del tres, estará a* $\frac{3}{4}$ *de la altura.*



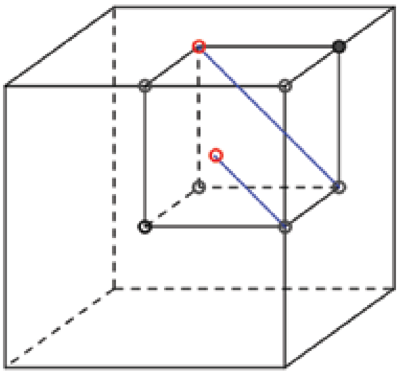
¿Qué puede decir de la sección en este caso?

Solución

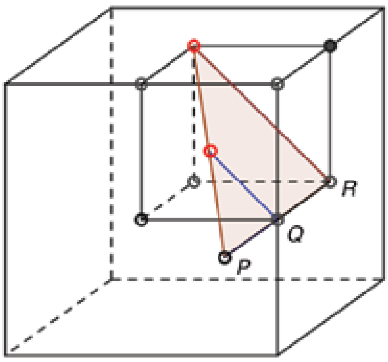
Consideremos el cubo cuyos vértices son el centro del cubo dado, centros de sus caras, puntos medios de sus aristas y un vértice, tal como se indica en la figura.



Se han incluido en este cubo dos de los puntos que determinan el plano de sección del problema. Teniendo en cuenta que los segmentos indicados en azul

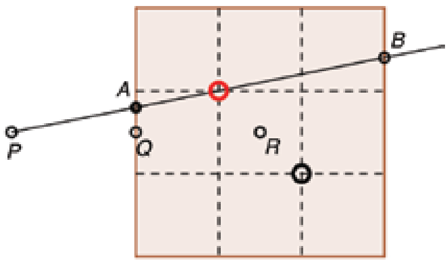


son paralelos, éstos están en un mismo plano y determinan dos triángulos semejantes,

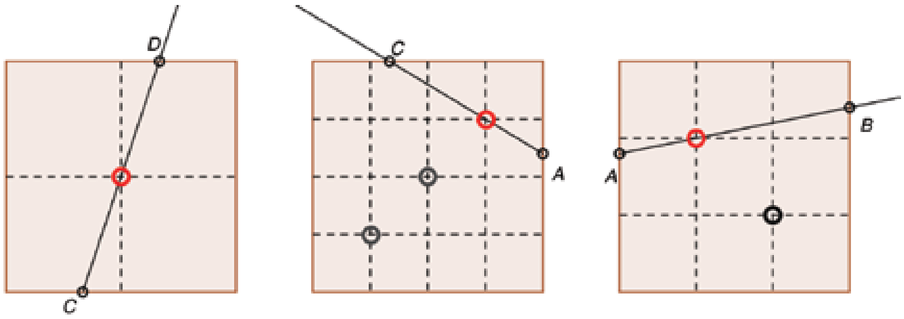


estando éstos están en la relación *2:1*, es decir, las longitudes de *PQ* y *QR* son las mismas.

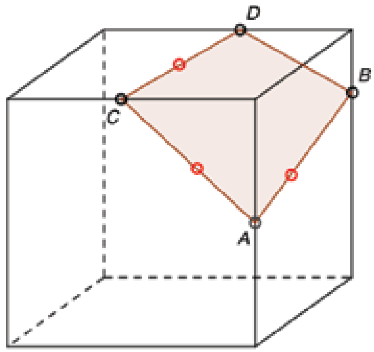
Ubiquemos ahora los puntos *R, P* y *Q* sobre el plano que contiene a la cara del dado que corresponde al tres.



La recta que une P con el punto marcado con rojo se encuentra en el plano de la sección, por estar ambos puntos en dicho plano. Esta recta corta a dos aristas del dado en los puntos A y B. Para completar la sección, sólo tenemos que unir A con el punto rojo en la cara del tres para obtener C y luego C con el punto rojo en la cara del uno para obtener D.



La sección encontrada es un cuadrilátero como en la figura.



Problema 36 Una caja en forma de cubo, tanto en su exterior como en su interior, ocupa un volumen de $1000 cm^3$. La caja se hizo con telgopor de 1cm de espesor. ¿Cuál es la capacidad de la caja?

Solución

Las aristas de la caja miden 10cm, las aristas del cubo interior miden 8cm, de modo que la capacidad es $512 cm^3$.

Problema 37 Una caja en forma de cubo, tanto en su exterior como en su interior, se hizo con telgopor de 1cm de espesor. Si la capacidad de la caja es un octavo de su volumen, ¿cuál es la capacidad de la caja?

Solución

Si las aristas de la caja miden a cm, las aristas del cubo interior medirán $(a - 2)$cm. Se sabe que la capacidad es la octava parte del volumen, es decir:

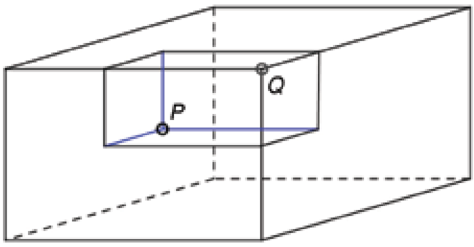
$$8(a - 2)^3 = a^3, \text{ o sea } 2 \times (a - 2) = a$$

Resulta $a = 4$ y la capacidad de la caja es $8 cm^3$.

Problema 38 En el interior de una caja cuyas aristas miden 3cm, 4cm y 12cm respectivamente, una mosca se encuentra a las distancias de 1cm, 2cm y 6cm de las caras de la caja perpendiculares a las aristas de 3cm, 4cm y 12cm respectivamente. En cada vértice de la caja hay un sapo que puede comer cualquier insecto que se encuentre a menos de 6cm. ¿Sobrevivirá la mosca?

Solución

Notemos que si se conocen las distancias desde un punto en el interior de una caja a tres caras no paralelas de la caja, entonces se puede conocer la distancia desde el punto al vértice en que concurren dichas caras. En efecto, la figura muestra que, desde un punto *P* en el interior de la caja, puede formarse una caja cuyas aristas son paralelas a las de la caja.



Las longitudes de las aristas de esta nueva caja son las distancias desde *P* a tres de las caras que concurren en el vértice *Q*. Luego, la distancia entre *P* y *Q* es la longitud de la diagonal interior de la nueva caja.

En nuestro problema, las distancias desde la mosca a las caras son: 1cm y 2cm a las caras perpendiculares a la arista de 3cm, 2cm a las caras perpendiculares a la arista de 4cm y 6cm a las caras perpendiculares a la arista de 12cm. De manera que las distancias a los vértices son:

$$\sqrt{1^2+2^2+6^2}\ cm,\ \sqrt{2^2+2^2+6^2}\ cm$$

La distancia más pequeña a un vértice es el primer valor, aproximadamente 6,4031cm, en consecuencia, los sapos no pueden comerse a la mosca.

APÉNDICE

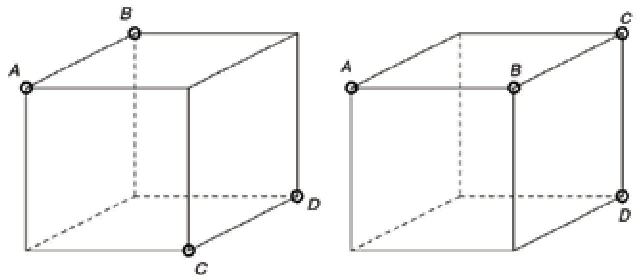
A continuación se presentan algunas definiciones y enunciados propios de la geometría del espacio, como material complementario de los problemas propuestos.

Definiciones

Coplanares

Así como los puntos de un conjunto en el plano se dicen alineados si hay una recta que los contiene, en el espacio se introduce el siguiente concepto:

Los puntos de un conjunto en el espacio se dicen coplanares si hay un plano que los contiene.



Por ejemplo, los vértices *A, B, C, D* del primer cubo son coplanares, mientras que los vértices *A, B, C, D* del segundo cubo no son coplanares.

Rectas paralelas

Dos rectas en el espacio son paralelas si son coplanares y no se cortan.

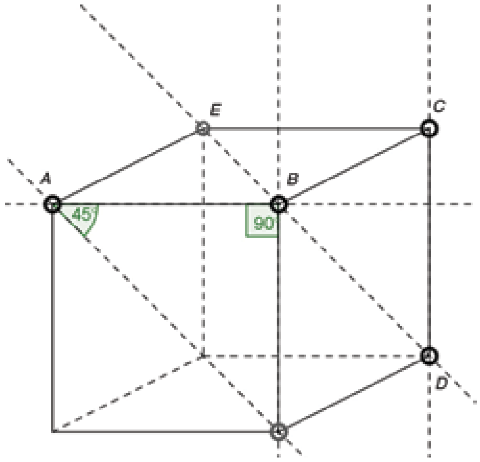
Rectas alabeadas

Dos rectas en el espacio son alabeadas si no se cortan y no son paralelas.

Por ejemplo, en la figura precedente, las rectas *AB* y *CD* del primer cubo son paralelas, y las rectas *AB* y *CD* del segundo cubo son alabeadas.

Ángulos entre rectas

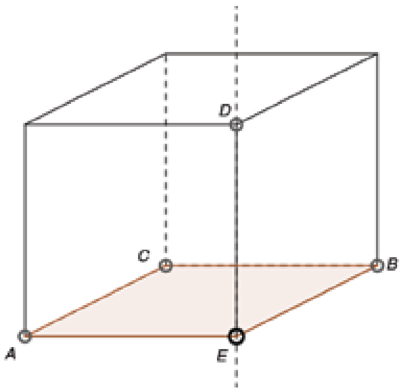
El ángulo entre dos rectas dadas en el espacio es el ángulo entre otras dos rectas que se corten y sean paralelas a cada una de las rectas dadas.



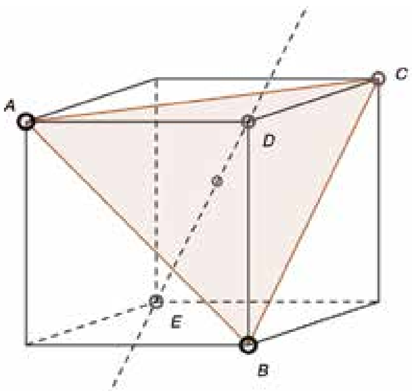
En esta figura, el ángulo entre las rectas *AB* y *CD* es 90° y el ángulo entre las rectas *AB* y *ED* es 45°.

Perpendicularidad plano-recta

Una recta es perpendicular a un plano si forma ángulo recto con dos rectas del plano que no sean paralelas.



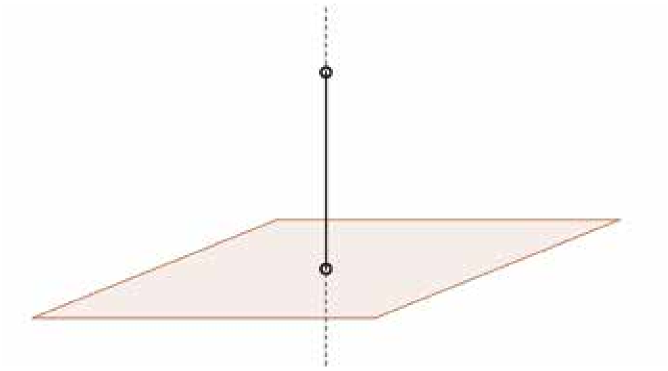
En la figura precedente, la recta *DE* es perpendicular al plano que determinan *A, B, C*.



En esta figura, la recta *DE* es perpendicular al plano determinado por *A, B, C*. Esta afirmación puede justificarse usando el concepto de plano bisector que figura más adelante en este apéndice.

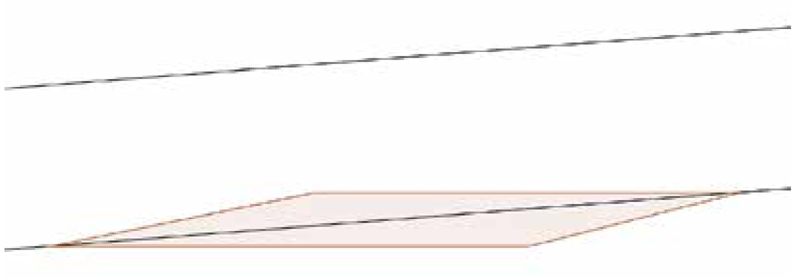
Distancia plano-punto

La distancia entre un punto y un plano es la longitud del segmento cuyos vértices son: el punto y la intersección del plano con la recta perpendicular al mismo que pasa por el punto.



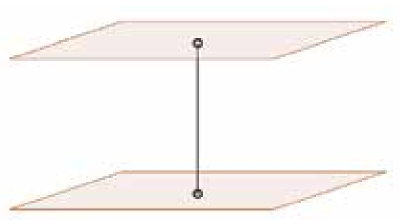
Paralelismo

Una recta es paralela a un plano, si está contenida en el plano o si no se cortan.



Dos planos distintos en el espacio son paralelos si no se cortan.

La distancia entre planos paralelos es la longitud del segmento perpendicular a ambos planos que tiene un extremo en cada plano.



Enunciados

Aceptamos como válidos los enunciados listados a continuación, algunos de los cuales se han utilizado en la resolución de los problemas desarrollados al comienzo de esta nota.

Rectas y planos

- *Si un plano y una recta se cortan, entonces o bien la recta está contenida en el plano, o bien se cortan en un único punto.*

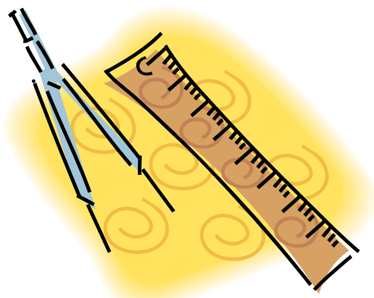
Puntos y rectas

- *Por dos puntos distintos del espacio pasa una única recta.*
- *Por un punto exterior a una recta l pasa una única recta paralela a la recta l.*

Puntos y planos

- *Por tres puntos no alineados del espacio pasa un único plano.*
- *Si dos puntos están en un plano, entonces la recta que pasa por esos puntos está contenida en el plano.*
- *Por un punto exterior a un plano pasa una única recta perpendicular al plano.*
- *Por un punto exterior a un plano pasa un único plano paralelo al mismo.*

Rectas



- *Dos rectas distintas que se cortan están contenidas en un único plano.*
- *Dos rectas paralelas distintas están contenidas en un único plano.*

Planos

Dos planos no paralelos se cortan en una única recta.

Transitividad del paralelismo

Si A, B, C son planos o rectas en el espacio, se cumple: si A es paralelo a B y B es paralelo a C entonces A es paralelo a C.

Separación

Un plano divide al espacio en dos regiones disjuntas. Si se retira un plano del espacio, éste queda dividido en dos regiones disjuntas. Lo mismo que si se quita una recta de un plano o si se quita un punto de una recta.

Fórmulas de áreas

El área de un triángulo cuyos lados miden a, b y c puede ser obtenida por la Fórmula de Herón dada por:

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde s indica el semiperímetro, es decir: $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

También podemos mencionar la fórmula de *Brahmagupta* para un cuadrilátero inscriptible.

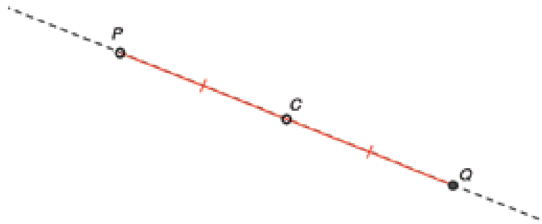
El área de un cuadrilátero inscriptible de lados a, b, c, d es igual a:

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

donde s indica el semiperímetro, es decir: $s = \dfrac{a+b+c+d}{2}$.

La simetría central

La simetría central respecto de un punto C es la transformación del espacio que a cada punto le hace corresponder el simétrico respecto del punto C, llamado centro de simetría. Es decir, si P es un punto cualquiera en el espacio, el *punto simétrico de P respecto de C* es el punto Q en la recta que une P con C tal que Q es distinto de P la distancia entre P y C es igual a la distancia entre Q y C.

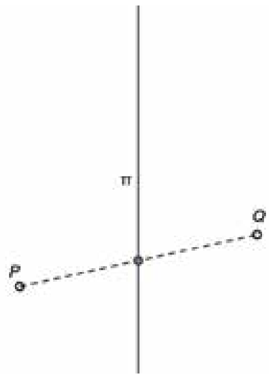


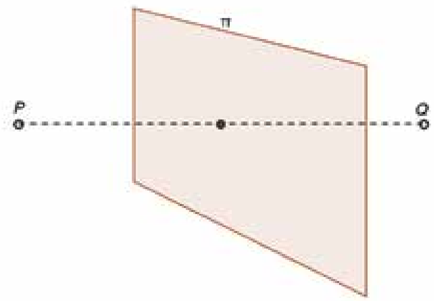
Una figura plana o un cuerpo, en el espacio, tiene centro si hay una simetría central que lo transforma en sí mismo.

Ejemplos: Puede mostrarse que las rectas, los planos, las circunferencias, los círculos, paralelogramos, paralelepípedos tienen centro. En cambio, un triángulo o un tetraedro no tienen centro.

Otras simetrías que pueden considerarse en el espacio son la simetría respecto de una recta y la simetría respecto de un plano.

Ambas se obtienen con el mismo principio. Notamos con π a la recta o al plano de la simetría. Si el punto P a transformar está en π, se transforma en sí mismo. En otro caso, se traza la recta l perpendicular a π que pase por P, y se toma el simétrico de P respecto del punto de intersección de l y π.





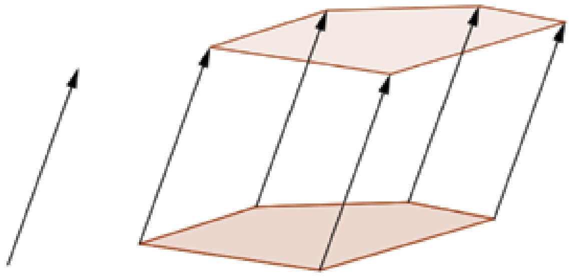
La simetría respecto de una recta entra en la familia de rotaciones alrededor de un eje, dado que se puede obtener con la rotación de 180° alrededor de la recta π.

Enunciados

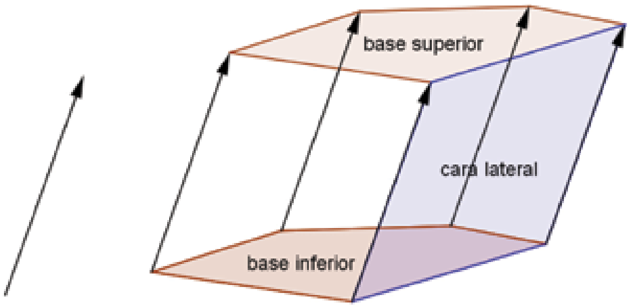
- *Todo plano que pase por el centro de un cuerpo lo divide en dos cuerpos de igual área e igual volumen.*
- *Una simetría central transforma un segmento en un segmento paralelo a éste y de igual longitud.*
- *Cuerpos simétricos respecto de un punto, recta o plano tienen igual volumen.*

Prisma

Una figura plana que se desplaza según un vector que no pertenezca al plano de la figura, genera un cuerpo conocido como *prisma*. Las figuras en los extremos del prisma se llaman *bases del prisma*. Por lo general, usaremos el término prisma para referirnos a cuerpos obtenidos de esta manera a partir de polígonos convexos.

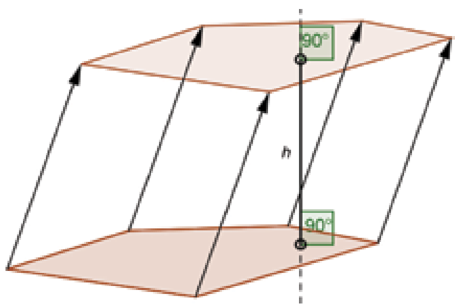


En este caso, se forman las *caras laterales*, que son los paralelogramos determinados por el desplazamiento que produce el vector sobre cada lado de la base.



Las aristas del prisma son las aristas de sus caras laterales.

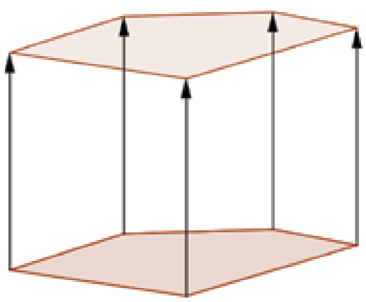
La *altura del prisma*, indicada con *h* en la figura, es la distancia entre las bases del mismo, es decir, la distancia entre los planos paralelos que contienen a cada una de las bases.



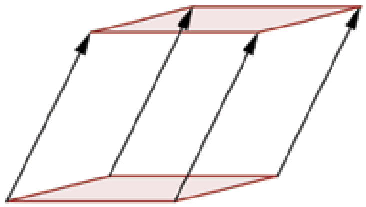
- *El volumen del prisma se calcula como área de la base por su altura, es decir:*

área de la base×altura

Un prisma se llama *prisma recto* si el vector utilizado para su generación es perpendicular al plano que contiene a la figura.



Un prisma se llama *paralelepípedo* si las bases son paralelogramos, en tal caso, todas las caras son paralelogramos.

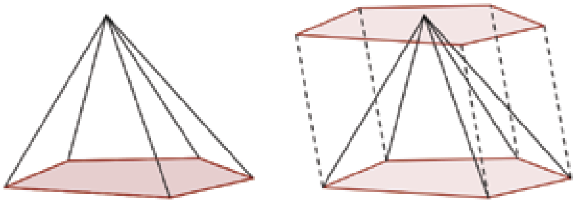


Los paralelepípedos rectos pueden llamarse *cajas*, todas sus caras son rectangulares. El *cubo*, en particular, es una caja donde todas sus caras son cuadradas.

Pirámide

La pirámide es un cuerpo que se obtiene a partir de una figura plana, llamada *base de la pirámide*, y un punto, llamado *vértice*, que no pertenezca al plano que contiene a la base. Es el cuerpo limitado por la base y las *caras laterales*, que son los triángulos formados por el vértice y cada lado de la base.

Aquí también nos ocuparemos de pirámides cuyas bases son polígonos convexos.



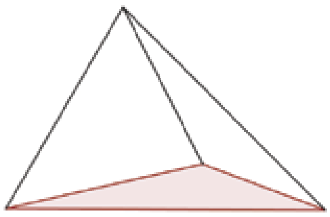
Toda pirámide puede ser incluida en un prisma, aunque no en forma única.

El volumen de la pirámide es igual $\frac{1}{3}$ *del volumen del prisma que la contiene, es decir:*

$$\frac{1}{3} \times \text{área de la base} \times \text{altura}$$

Naturalmente, la altura es la distancia desde el vértice al plano que contiene la base.

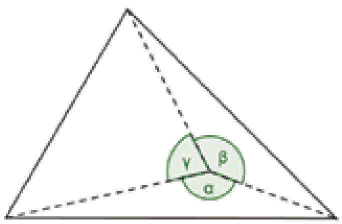
Un caso especial de pirámide está dado por aquellas de base triangular, a las que llamamos *tetraedros*.



Todas las caras de un tetraedro son triangulares y cualquiera de sus caras puede considerarse como base de la pirámide. En un tetraedro, por cada vértice hay una cara llamada *opuesta al vértice*, que es la única cara que no contiene al vértice. También hay pares de *aristas opuestas*, que son aquellas que no tienen un vértice en común.

Los ángulos α, β y γ en las caras que concurren en un vértice de un tetraedro, como muestra la figura, verifican las desigualdades:

$$\gamma < \alpha + \beta,\ \beta < \gamma + \alpha,\ \alpha < \beta + \gamma$$



NOTAS DE GEOMETRÍA 4

Propiedad:

Para algún vértice del tetraedro, la suma $\alpha + \beta + \gamma$ *es menor o igual que 180º.*

Esta afirmación surge de considerar las sumas de los ángulos en cada uno de los cuatro vértices, digamos s_1, s_2, s_3, s_4, las que podemos suponer $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq s_4$. La suma

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 4 \times 180°$$

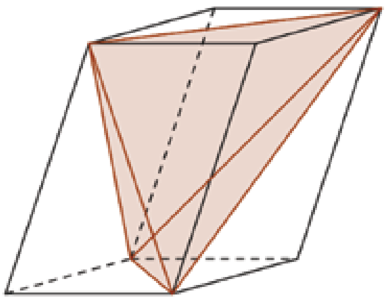
por ser la suma de los ángulos en las cuatro caras. Por otra parte:

$$4s_1 \leq s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 4 \times 180°$$

luego, $s_1 \leq 180°$.

Volumen de un tetraedro

Cada tetraedro puede ser incluido en un paralelepípedo de base cuadrangular como se indica a continuación, llamado el *paralelepípedo circunscripto.*



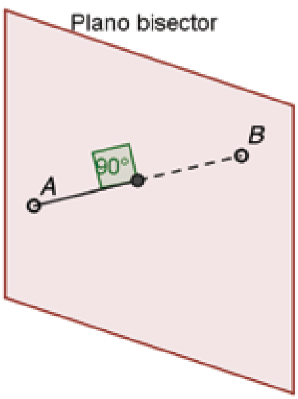
El volumen del tetraedro resulta igual a 1/3 del volumen del prisma. Para más información puede consultarse el libro *Área y Volumen en la geometría elemental* de la Red Olímpica.

Sección

Dado un cuerpo *C* y un plano *P*, se llama *sección de C por el plano P* a la figura obtenida por la intersección de *C* con *P*.

Plano bisector

Dados dos puntos *A* y *B* en el espacio, el conjunto de puntos del espacio que equidistan de *A* y de *B* es un plano, llamado *plano bisector del par A, B*, que es perpendicular al segmento *AB* y pasa por el punto medio de este segmento.



El *plano bisector de un segmento* es el plano bisector de sus puntos extremos.

Problemas propuestos

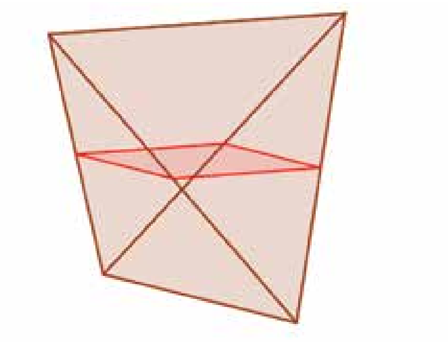
1. ¿Cuántos triángulos rectángulos se pueden formar que tengan sus vértices sobre vértices de una caja?

2. ¿Un paralelepípedo tiene centro? ¿Y un prisma?

3. Un paralelepípedo (o prisma) de 200g, es seccionado por un plano que pasa por su centro. ¿Cuánto pesa cada parte?

4. Un paralelepípedo (o prisma) de 200g, es seccionado por un plano que contiene los puntos medios de dos caras opuestas. ¿Cuánto pesa cada parte?

5. ¿Qué figura es la sección de un tetraedro regular por el plano paralelo a dos aristas opuestas que pasa por el punto medio de una de las aristas no paralela al plano?



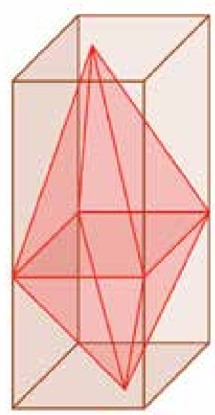
6. La distancia entre los puntos medios de dos aristas opuestas de un tetraedro regular es 1cm. Hallar el volumen y el área del tetraedro.

7. El centro de un cubo, el centro de una cara, el centro de una arista en la cara y un vértice de esta arista son los vértices de un tetraedro. ¿Cuál es el volumen de este tetraedro si el cubo es de arista 6cm? ¿Cuál es el área? ¿Cuánto miden sus aristas?

8. . Un plano pasa por los centros de tres de las caras de un tetraedro regular de 3cm de artista. Hallar el área y el perímetro de la sección determinada por este plano en el tetraedro.

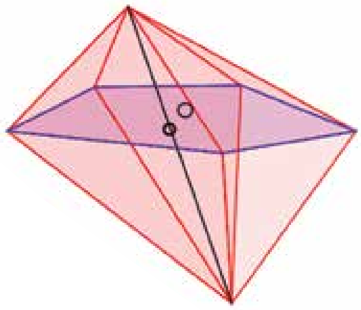
9. La base de la bipirámide es paralela a las caras opuestas de la caja de $6cm^3$ que la contiene, conforme lo muestra la figura.

Hallar el volumen de la bipirámide.

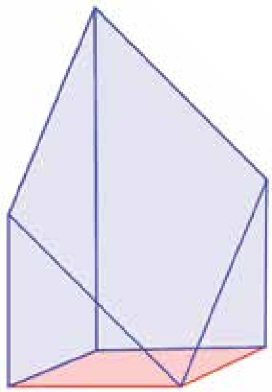


10. De un listón de madera con base triangular (o sección) se desea fabricar un listón cuatro veces más largo. ¿Cómo cortamos? (Un listón es un prisma recto).

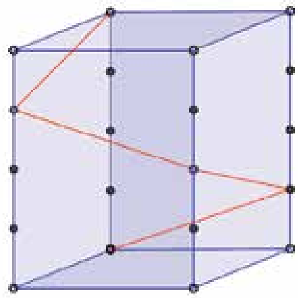
11. En la bipirámide de base pentagonal, el segmento que une los vértices superior e inferior es cortado en el punto *O* por la base en la relación 1:2. Si el volumen de la bipirámide es 12cm^3, ¿cuál es el volumen de cada pirámide?



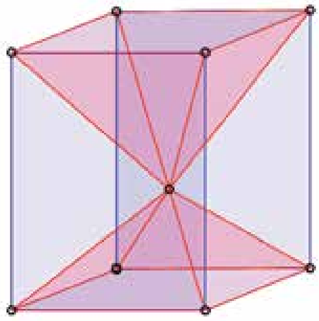
12. Un listón de madera de base cuadrada de 1cm de lado se ha seccionado de modo que quedó la pieza de la figura, con una cara con forma de rombo y 4cm de altura. Hallar el volumen de la pieza.



13. Una caja de base rectangular de 2cm por 3cm, tiene las aristas laterales de 4cm divididas en 4 partes iguales. ¿Cuál es la longitud de la poligonal que muestra la figura?



14. De una pieza con forma de caja se retiran las dos pirámides rojas que muestra la figura, una de 5cm^3 y la otra de 7cm^3. Hallar el volumen de la caja.



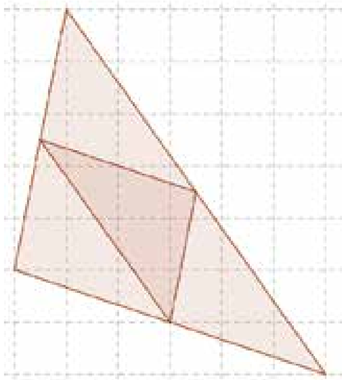
15. Los pies de tres alturas de un tetraedro caen sobre los circuncentros de las caras correspondientes. Determinar los ángulos de las caras del tetraedro.

16. Si un cuerpo con centro se secciona con un plano que no pasa por su centro, las partes obtenidas tienen áreas distintas y volúmenes distintos.

17. Cuatro centros de caras de un cubo de 1cm de arista son los vértices de un tetraedro. ¿Cuál es el volumen de este tetraedro?

18. ¿Cuántos planos distintos pueden ser determinados eligiendo tres puntos entre los vértices de un tetraedro y los puntos medios de sus aristas?

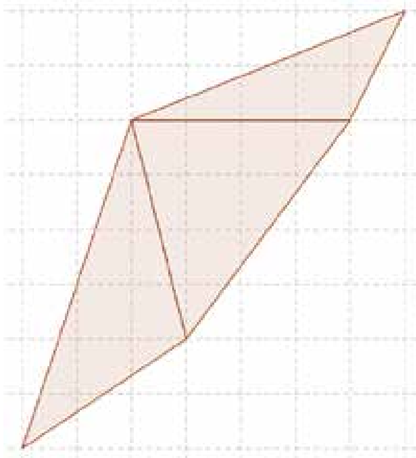
19. El triángulo de la figura tiene sus vértices sobre puntos del papel cuadriculado.



Los puntos medios de los lados del triángulo dan lugar a una descomposición del mismo en cuatro triángulos. ¿Puede ser esta figura el desarrollo de un tetraedro?

Sugerencia: Papel y tijera.

20. Los triángulos de la figura tienen sus vértices sobre puntos del papel cuadriculado.



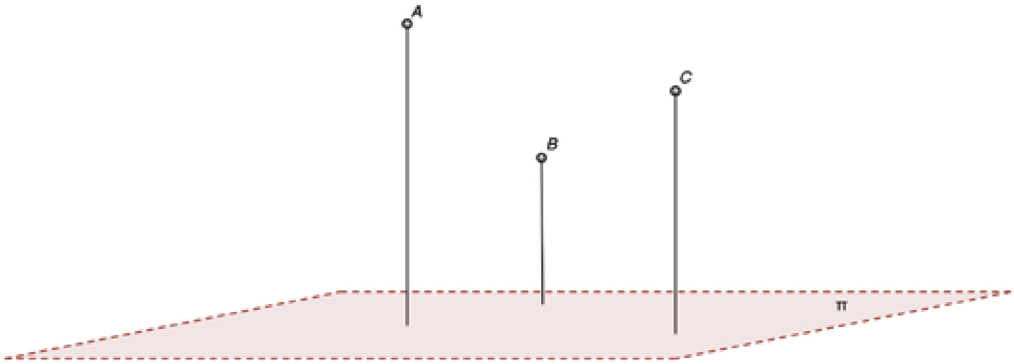
¿Puede ser esta figura el desarrollo de las caras laterales de una pirámide triangular?

Sugerencia: Papel y tijera.

21. ¿Puede justificar las afirmaciones siguientes?

- *Dos rectas concurrentes son coplanares.*
- *Dos rectas distintas en el espacio son: paralelas, concurrentes o alabeadas.*
- *Las aristas opuestas en un tetraedro determinan rectas alabeadas.*
- *Un punto y una recta en el espacio son coplanares.*
- *Dados en el espacio una recta y un punto que no pertenezca a la recta, existe un único plano que contiene al punto y a la recta.*
- *Si una recta l está en un plano P, una recta m no está en P y l y m se cortan en el punto Q, entonces m y P se cortan en el punto Q.*

22. Sobre el plano horizontal π hay tres columnas de distintas alturas y cuyos extremos superiores son *A*, *B*, *C*. Si *P*, *Q* y *R* son los respectivos puntos de intersección de las rectas por *AB*, *BC* y *CA* con el plano π, hallar el área del triángulo de vértices *PQR*.



También pueden interesarte