Año II 1 - Número 3 - Marzo 2015

NOTAS DE GEOMETRÍA

Redacctadas por los Doctores José Araujo, Guillermo Keilhauer y la Lic. Norma Pietrocola

TORNEO DE LAS CUENCAS

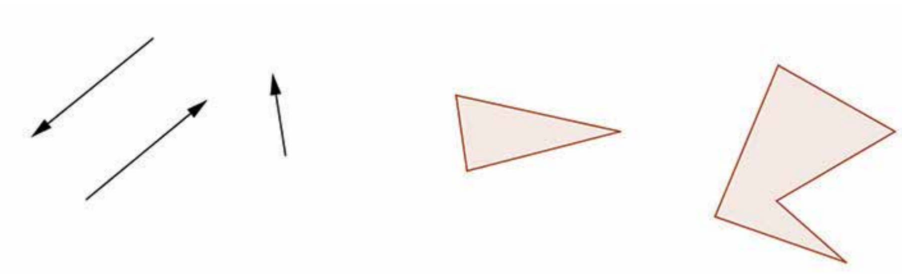
3 TERCERA NOTA

Construcciones geométricas. Movimientos

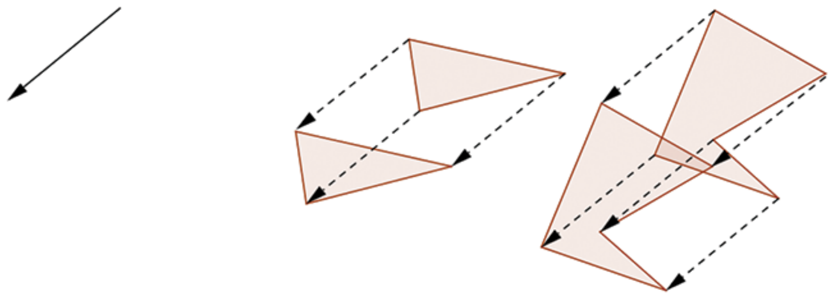
Las trasformaciones que a continuación se exponen, pueden ser realizadas fácilmente con la herramienta específica de un programa interactivo de geometría.

Se propone que los problemas de construcciones sean abordados usando regla y compás o un programa interactivo.

Problema 1 Dados las figuras y los segmentos orientados, trasladar las figuras según cada uno de los segmentos.

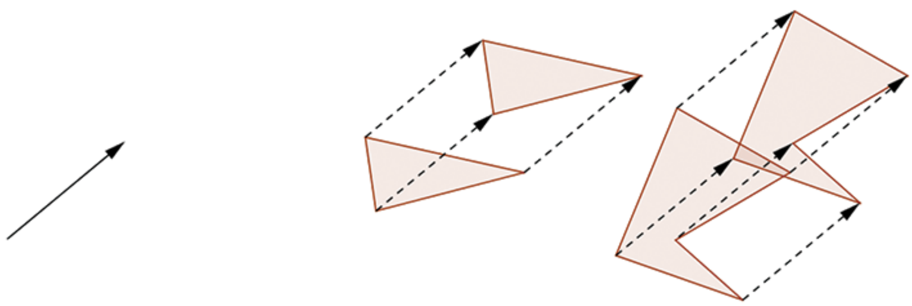


Solución:

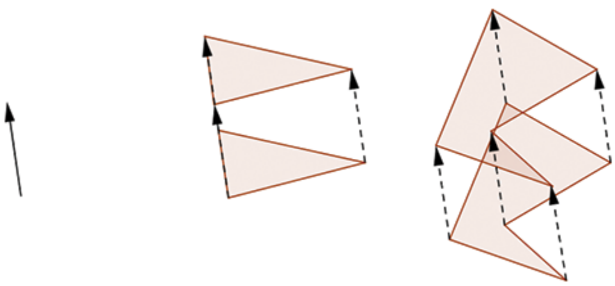


Trasladamos cada vértice según el primer vector.

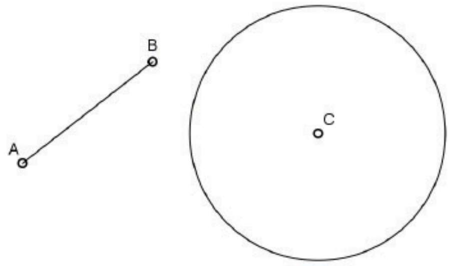
Trasladamos cada vértice según el segundo vector.



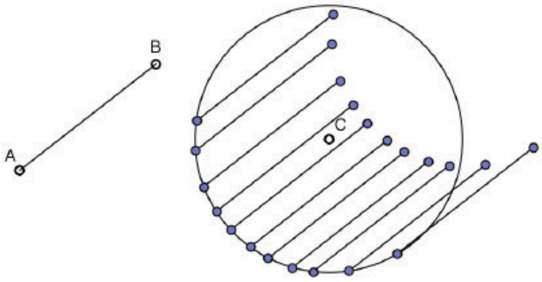
Trasladamos cada vértice según el tercer vector.



Problema 2 Inscribir una cuerda en la circunferencia *C* que sea paralela a *AB* y de igual longitud que *AB*.

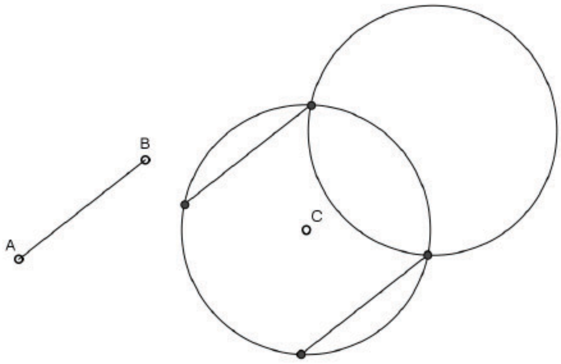


Solución



Si se apoya un extremo del segmento *AB* sobre la circunferencia y se lo hace girar sobre la misma, manteniendo su dirección, el extremo no apoyado describe una circunferencia.

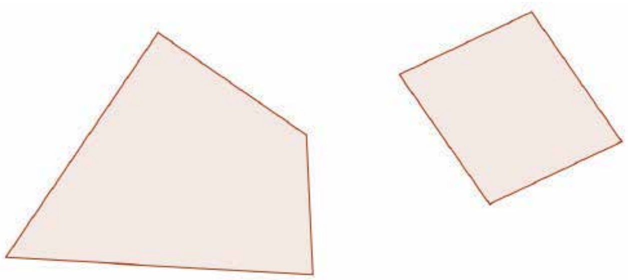
Esta nueva circunferencia es la que se obtiene al trasladar cada punto de *C* según la dirección y la magnitud del segmento *AB*.



El segmento quedará inscripto en *C* cuando el extremo que no se apoyaba en *C* pase por *C*, es decir, en los puntos de intersección de ambas circunferencias.

Comentario: Como se ve en la última figura, hay dos soluciones. ¿En qué condiciones habrá una única solución? ¿En qué condiciones no habrá solución?

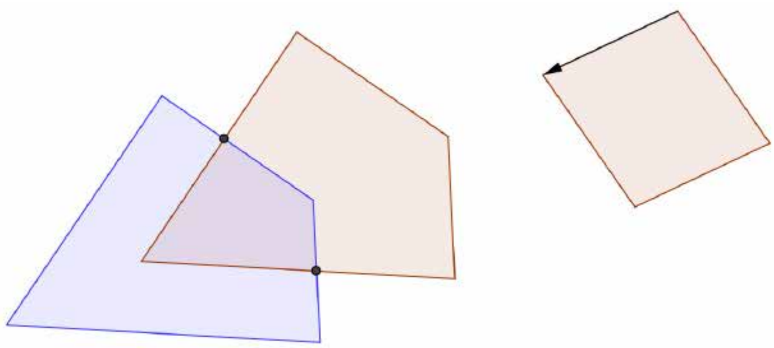
Problema 3 Dados el paralelogramo y el cuadrilátero en la siguiente figura



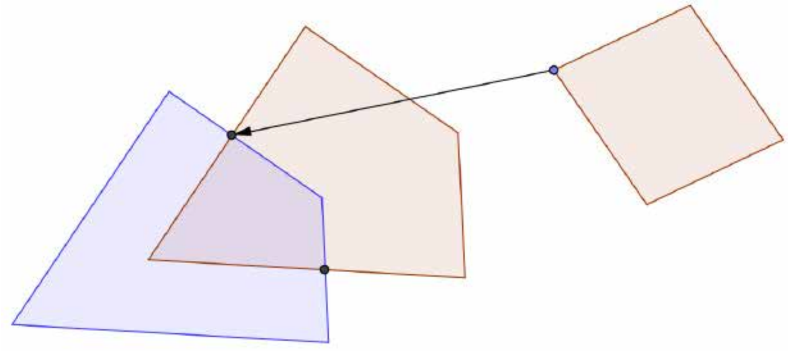
¿Es posible trasladar el paralelogramo de modo que quede inscripto en el cuadrilátero? En caso afirmativo, indicar cómo hacerlo.

Solución

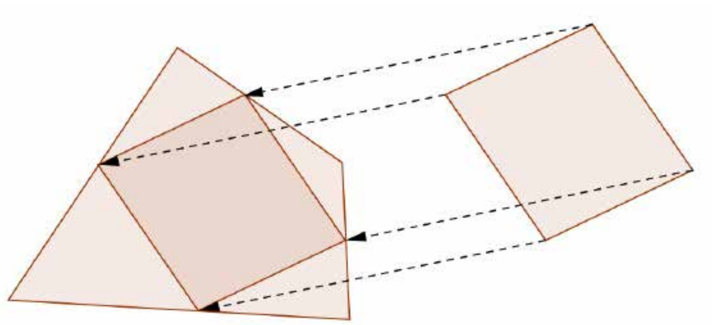
Para inscribir el paralelogramo, habrá que inscribir los lados del mismo. Tomamos uno de ellos y procedemos como en el problema 2.



Encontramos dos puntos para inscribir un segmento paralelo al segmento elegido y de la misma longitud que éste. Para que el paralelogramo pueda quedar inscripto en el cuadrilátero, la única posibilidad es usar la traslación indicada

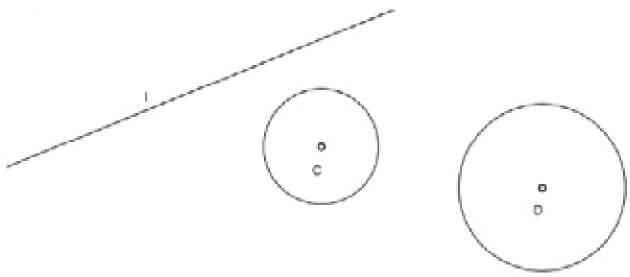


dado que si se traslada hasta el otro punto señalado, el paralelogramo no quedaría inscripto. En la situación del problema plantado, esta traslación inscribe el paralelogramo en el cuadrilátero.



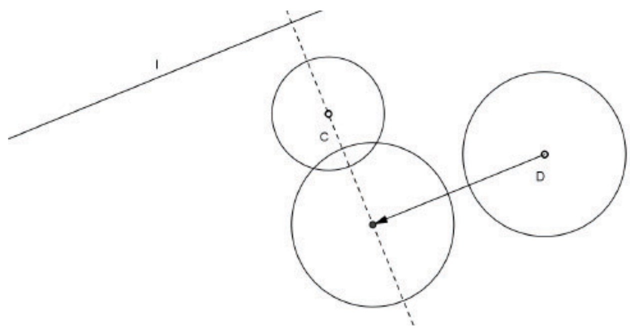
Problema 4

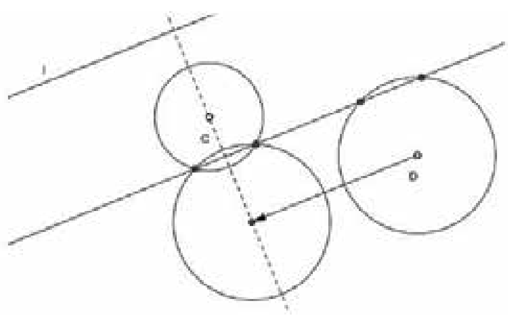
Trazar una recta paralela a *l* que corte a las circunferencias *C* y *D* en cuerdas de igual longitud.



Solución

Si trasladamos la circunferencia *D* en dirección paralela a *l* hasta que los centros de las circunferencias *C* y la trasladada de *D*, queden en una perpendicular a *l*, cómo lo muestra la figura:



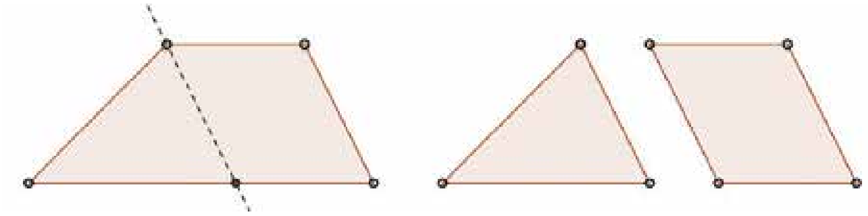


encontraremos la solución, trazando la recta determinada por los puntos en la intersección de las circunferencias.

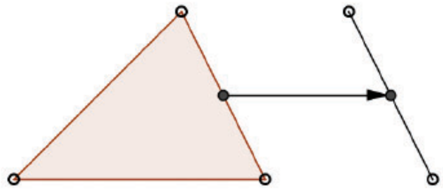
Problema 5 Construir un trapecio cuyos lados midan *2cm, 3cm, 4cm* y *5cm* respectivamente.

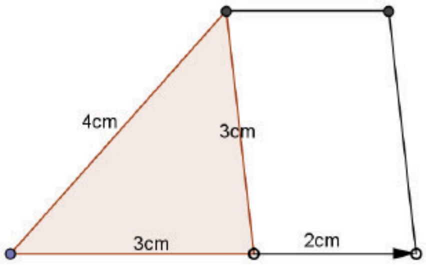
Solución

Notemos primero que todo trapecio puede ser descompuesto en un triángulo y un paralelogramo.



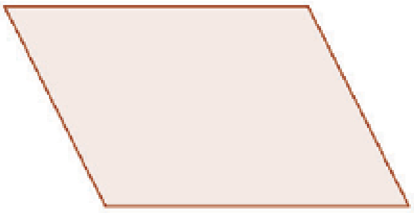
El trapecio puede ser reconstruido a partir del triángulo trasladando uno de los lados del triángulo una cierta magnitud en la dirección paralela a la base.





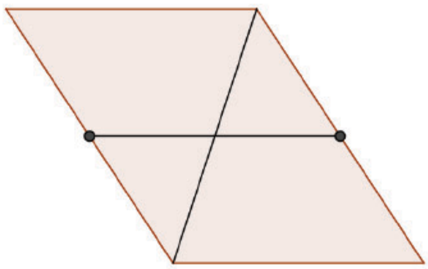
Con datos del problema, los únicos valores posibles para los lados del triángulo son: $5cm - 2cm = 3cm$, *3cm* y *4cm*.

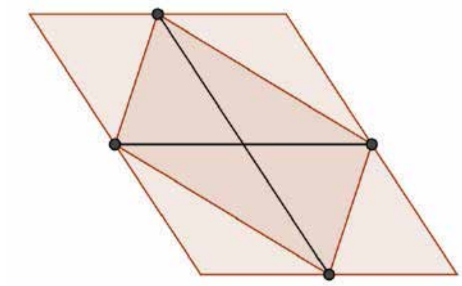
Problema 6 Construir un paralelogramo a partir de su paralelogramo de Varignon.



Solución

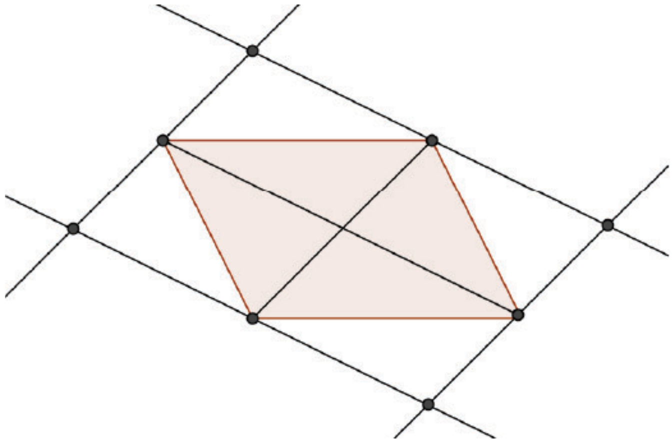
Es oportuno observar que el segmento que une puntos medios de lados opuestos de un paralelogramo, es paralelo a los lados opuestos restantes y de igual longitud que éstos. Esto puede justificarse, dado que el segmento puede obtenerse como la unión de bases medias de triángulos iguales con bases paralelas.



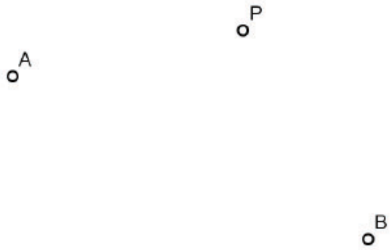


De la observación surge que las diagonales del paralelogramo de Varignon son iguales y paralelas a los lados del paralelogramo.

Para resolver el problema, sólo debemos trazar, por los vértices del paralelogramo de Varignon, rectas paralelas a sus diagonales.

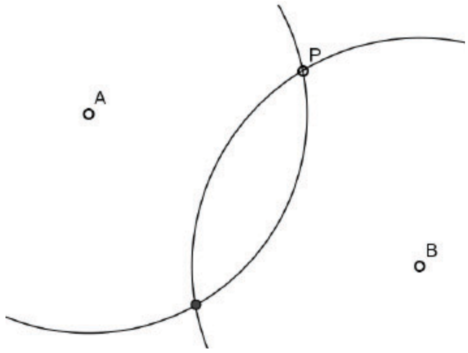


Problema 7 El punto *P* está en la intersección de dos circunferencias de centros *A* y *B* respectivamente. Usando un compás, determinar otro punto en la intersección de dichas circunferencias.



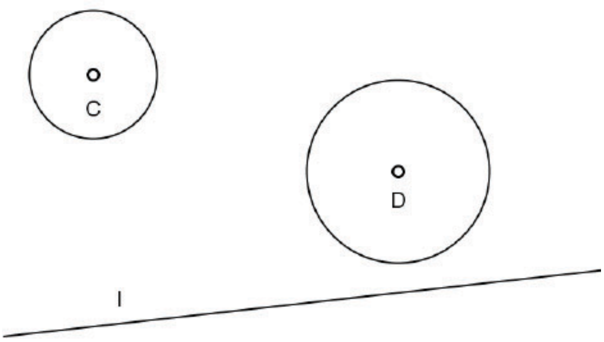
Solución

Trazamos circunferencias con centro en *A* y centro en *B* que pasen por *P*.



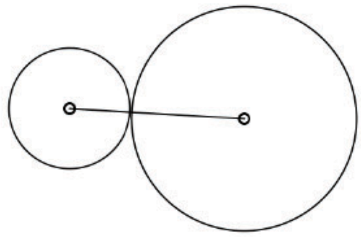
Comentario: De este problema elemental, surge que si las circunferencias se cortan en un solo punto, este punto debe estar alineado con los centros y, en tal caso, la distancia entre los centros es igual a al suma de los radios. En general, podemos apreciar que los puntos de intersección de dos circunferencias ocupan posiciones simétricas respecto de la recta que une los centros de las circunferencias.

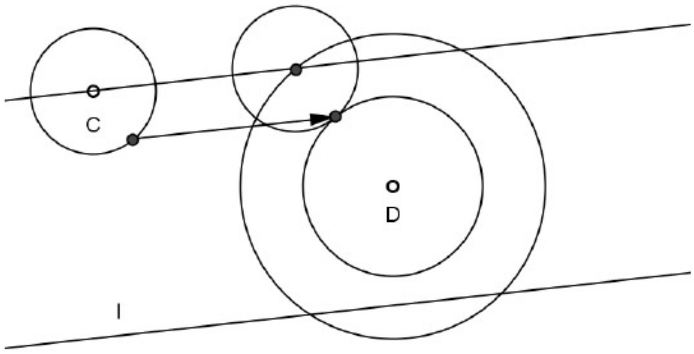
Problema 8 El disco *C* se desplaza hacia el disco *D* siguiendo la dirección de la recta *l*. Determinar los puntos en *C* y en *D* donde estos discos entrarán en contacto.



Solución

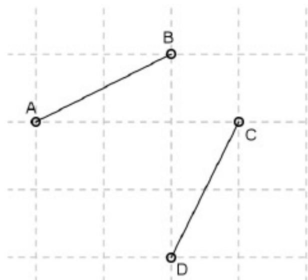
Si dos circunferencias tienen un solo punto en común, como en el caso de la figura,





la distancia entre sus centros es igual a la suma de los radios (vea el problema 7). A partir de esto, en el momento de contacto, el centro del disco *C* se encontrará en una circunferencia con el mismo centro que *D* y radio igual a la suma de los radios de *C* y *D*. Por otra parte, el centro del disco *C* se desplazará sobre en la recta paralela a *l* que pasa por este centro.

Problema 9 Encontrar el centro de una rotación que mueva el segmento *AB* en el segmento *CD*.

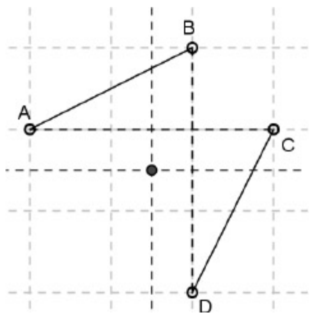


Solución

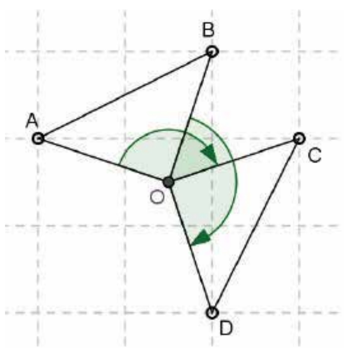
Tendremos en cuenta el siguiente hecho:

Si una rotación mueve un punto en otro, su centro se encuentra en la mediatriz del segmento que une dichos puntos.

Si la rotación mueve *A* en *C* y *B* en *D* el centro será la intersección de las mediatrices de los segmentos *AC* y *BD*.

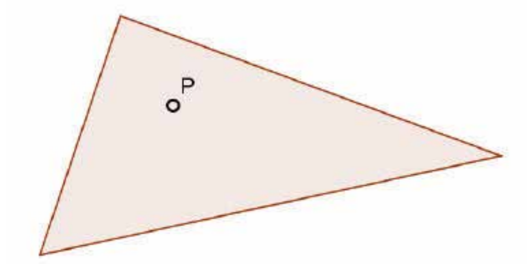


Resta saber si hay consistencia en los ángulos, es decir si el ángulo que barre *A* hasta llegar a *C* es el mismo que barre *B* hasta llegar a *D*.

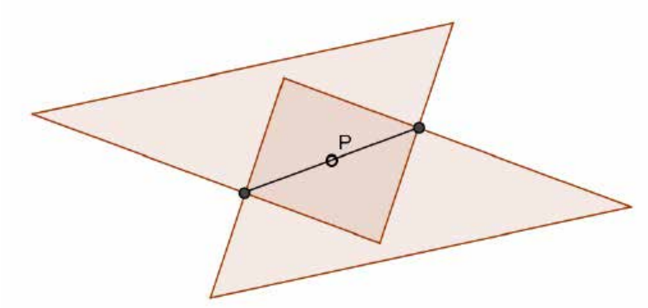


En la figura *O* es el centro de la rotación. Por la ubicación del los puntos sobre el cuadriculado debe ser $AB = CD$, por ser *O* el punto de intersección de las mediatrices, es $AO = OB$ y $CO = OD$, de manera que los triángulos *AOB* y *COD* son iguales y en consecuencia los ángulos *AOC* y *BOD* son iguales.

Problema 10
Inscribir un segmento en el triángulo dado de modo que *P* sea el punto medio del segmento inscripto.

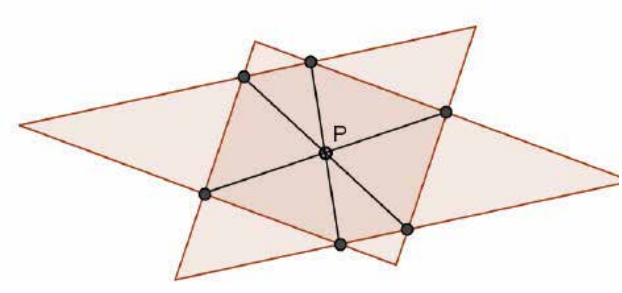


Solución:

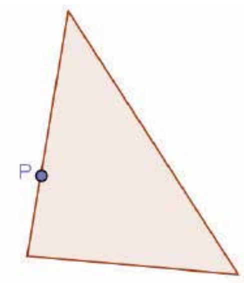


Si el problema estuviera resuelto y rotamos *180º* el segmento obtenido alrededor del punto *P*, obtendremos que los extremos del segmento son intercambiados por la rotación, es decir, ambos extremos deben estar tanto en el triángulo dado como en el triángulo resultante de rotar *180º* alrededor de P.

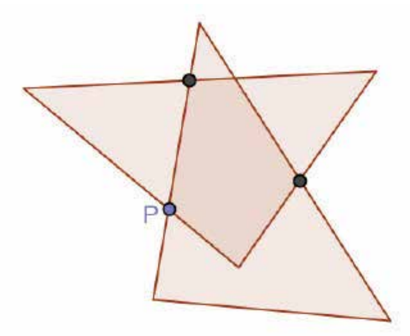
Comentario: Notar que según la posición del punto P, podría haber más de una solución.



Problema 11
En el triángulo dado, inscribir un triángulo equilátero de modo que uno de sus vértices sea el punto *P*.

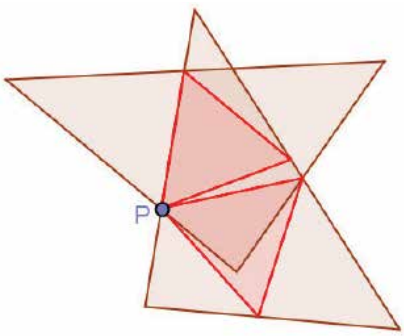


Solución



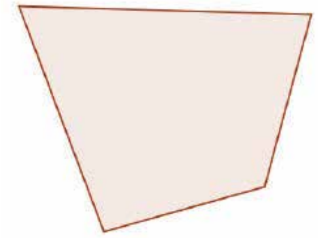
Si rotamos el triángulo *60º* alrededor de *P*, en sentido anti horario, un vértice del triángulo buscado se moverá sobre el otro, es decir, pertenecerá a la intersección de ambos triángulos.

En este caso hay dos soluciones:

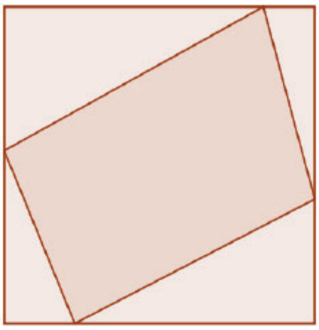


Comentario: Cuando se habla de inscribir un triángulo en otro, por lo general se entiende que el triángulo inscripto debe tener un vértice en cada lado del otro triángulo. En sentido más amplio, un triángulo se inscribe en otro si sus vértices están en los lados del otro.
En el problema también podría buscarse una solución considerando una construcción similar a la dada pero rotando en sentido horario.

Problema 12 Inscribir el cuadrilátero dado en un cuadrado.

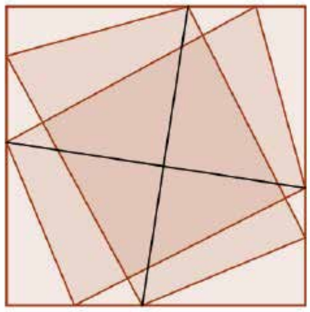


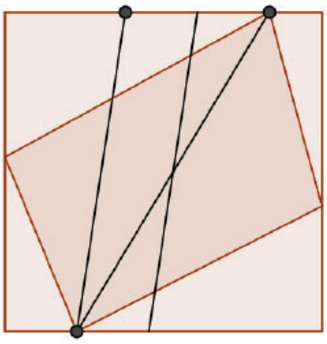
Solución



Consideremos cualquier cuadrilátero inscripto en un cuadrado.

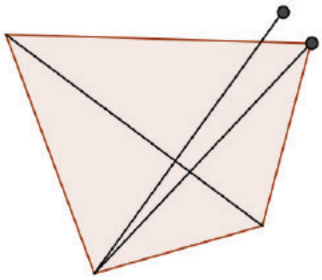
Si se rotara *90º* alrededor del centro del cuadrado:



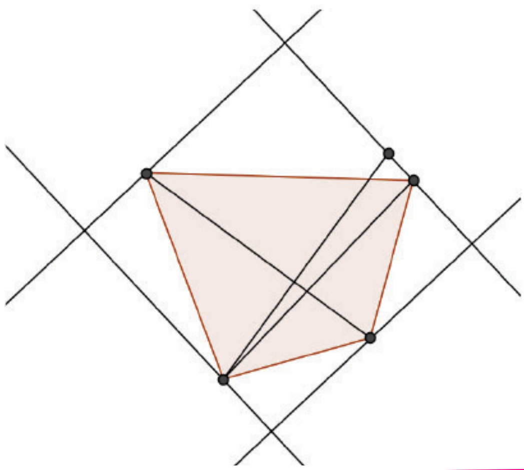


una diagonal del cuadrilátero se moverá a un segmento perpendicular a ella y de igual longitud: Si este segmento se traslada sobre un lado del cuadrado para que coincida con un vértice de la otra diagonal, se tiene dos puntos en un lado del cuadrado.

De esta manera se observa que un lado del cuadrado está sobre la recta que pasa por esos dos puntos.

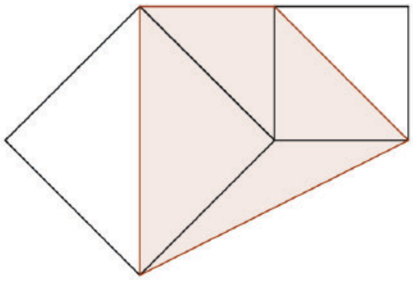


Resolvamos el problema usando la construcción precedente. Trazamos un segmento perpendicular a una diagonal y de igual longitud que esta que coincida en un extremo con la otra diagonal.



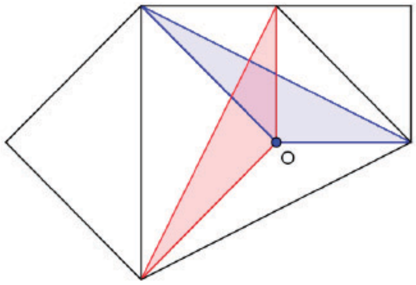
Sobre la recta que une estos dos puntos está un lado del cuadrado. Completamos la construcción trazando las rectas por los vértices restantes.

Problema 13 En la figura hay dos cuadrados y un cuadrilátero. Mostrar que el paralelogramo de Varignon del cuadrilátero es un cuadrado.

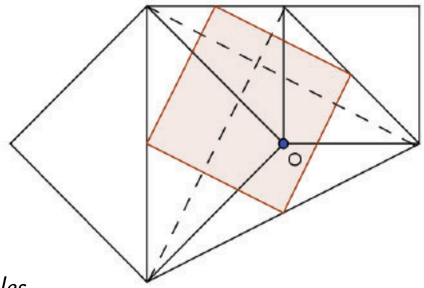


Solución

Si se rota el triángulo coloreado de rojo, 90° en sentido horario, alrededor del punto O, se obtiene el triángulo coloreado de azul.



Esto muestra que las diagonales del cuadrilátero son perpendiculares y de igual longitud, lo mismo ocurre con el paralelogramo de Varignon.



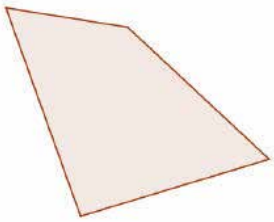
Luego el paralelogramo es un cuadrado.

Comentario: Es oportuno recordar que un paralelogramo con las diagonales iguales es un rectángulo y si además éstas son perpendiculares, es un cuadrado.

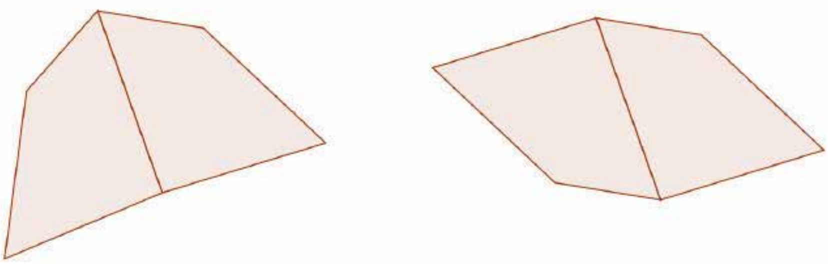
Problema 14 ¿Puede servir cualquier cuadrilátero como baldosa para cubrir un plano?

Solución

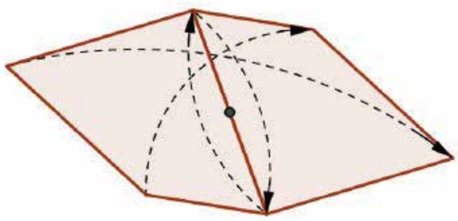
Consideremos un cuadrilátero cualquiera, por ejemplo con los cuatro lados distintos



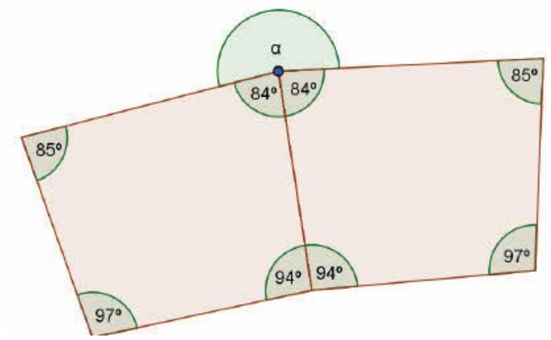
Por simplicidad, buscamos soluciones donde dos baldosas de esta forma pueden ser colocadas coincidiendo en uno de sus lados como en la figura



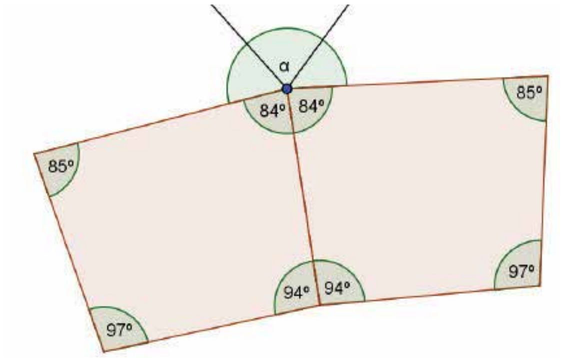
En el primer caso, las baldosas están ubicadas en forma simétrica respecto de uno de sus lados, mientras que en el segundo, una se obtiene rotando la otra *180°* respecto del punto medio de uno de sus lados. La siguiente figura ilustra la rotación.



Para un cuadrilátero cuyos ángulos midan *94°*, *97°*, *85°* y *84°*, la situación del primer caso no permitiría completar el embaldosado. Por ejemplo, si fuera el caso que ilustra la figura:



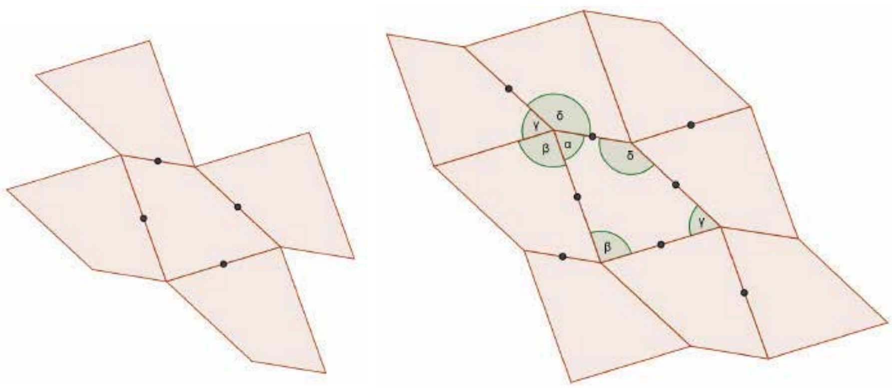
El ángulo $\alpha = 360° - 2 \times 84° = 192°$ tiene que obtenerse como suma de los ángulos del cuadrilátero, ya que la región señalada por este ángulo debe cubrirse con esquinas de baldosas;



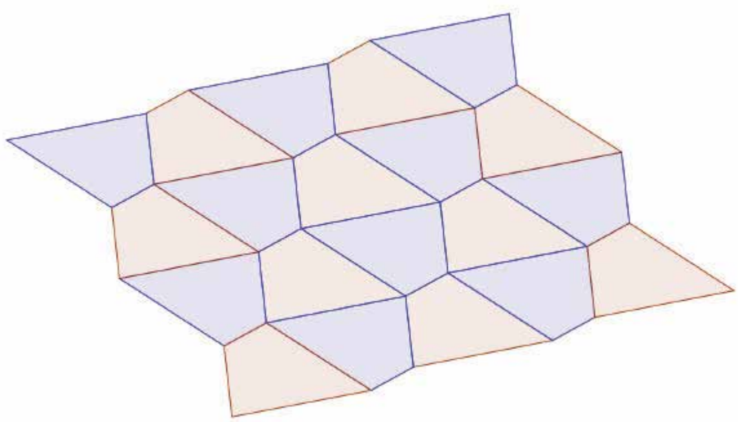
Con tres esquinas se sumaría como mínimo $3 \times 84° = 252°$; los casos de dos esquinas no exceden a $94° + 97° = 191°$, luego no es posible completar esta configuración.

Situaciones similares ocurren si se trabaja sobre otros lados del cuadrilátero.

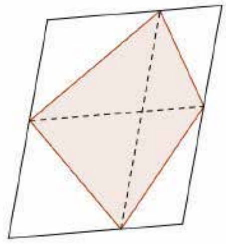
El segundo caso permite llegar a un embaldosado reiterando el movimiento sobre los puntos medios de los lados de los cuadriláteros generados. Las siguientes figuras ilustran la construcción.

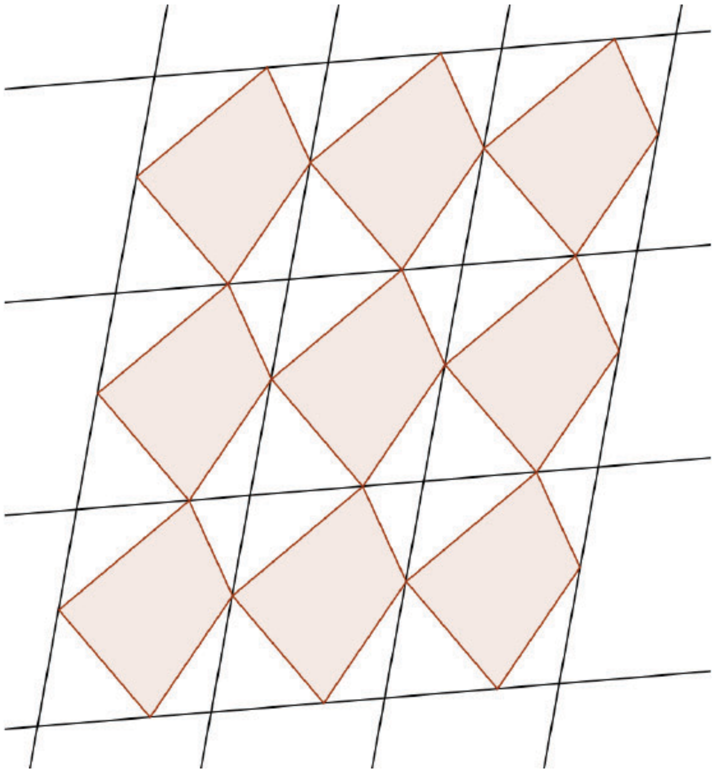


Esta construcción no presenta el inconveniente de la anterior, porque en todos los casos, las esquinas concurrentes son las cuatro esquinas de la baldosa, cuyos ángulos suman *360°*. Avanzando en el proceso anterior, el embaldosado toma el aspecto dado por siguiente figura, donde con los diferentes colores se destaca el hecho que se forman dos familias obtenidas cada una por traslación de un mismo cuadrilátero en posiciones distintas.



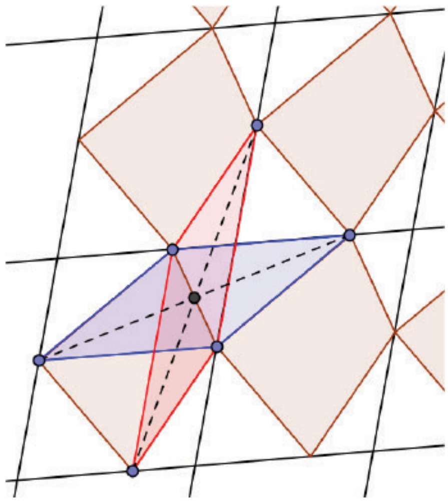
Después de esto, una justificación de que el embaldosado es posible, puede darse de la siguiente manera: A partir de un cuadrilátero dado se construye un paralelogramo trazando por vértices opuestos rectas paralelas a la diagonal que no los tiene por extremos.

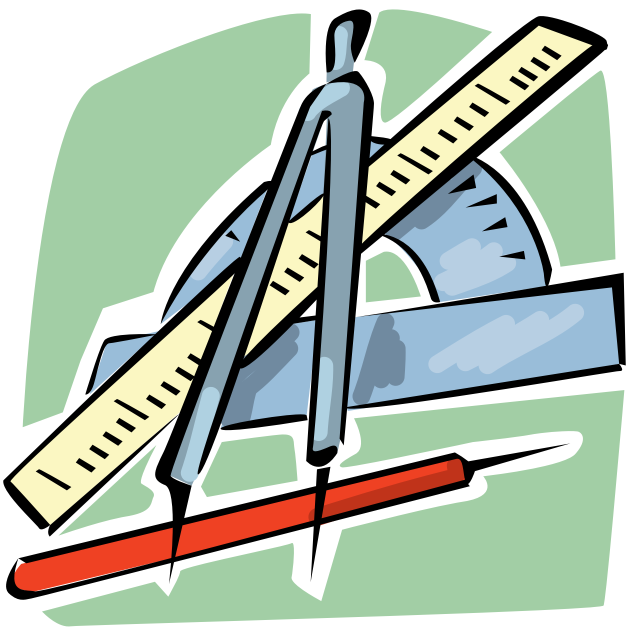




Este paralelogramo, con el cuadrilátero como diseño interior, es una baldosa que claramente permite embaldosar el plano.

Se observa que el embaldosado genera nuevos cuadriláteros, en color blanco, éstos se pueden obtener rotando *180º* con centro en el punto medio del lado común. Justifican esta afirmación los paralelogramos coloreados en rojo y azul en la figura cuyas diagonales se cortan en el punto medio del lado común.

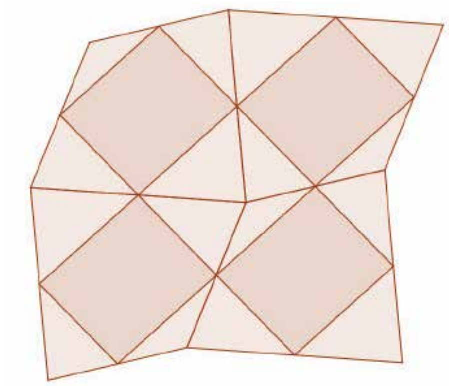




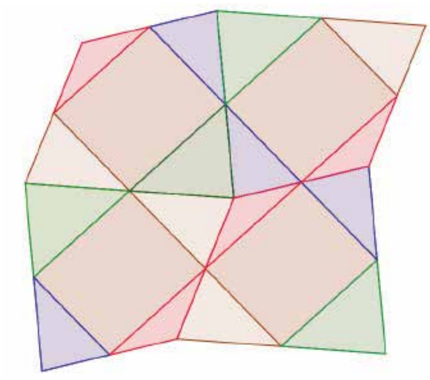
Problema 15 De un cuadrilátero de papel se recorta el paralelogramo de Varignon y quedan cuatro triángulos. Mostrar que estos triángulos pueden acomodarse para formar el paralelogramo de Varignon.

Solución

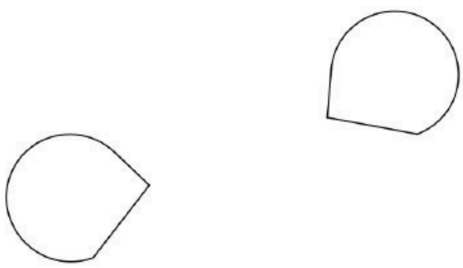
Teniendo en cuenta el problema anterior, se observa que los paralelogramos de Varignon de cuatro baldosas vecinas rodean un nuevo paralelogramo de Varignon cómo muestra la figura. El mismo está dividido en cuatro triángulos



Estos cuatro triángulos son los que en cada baldosa rodean al paralelogramo de Varignon.

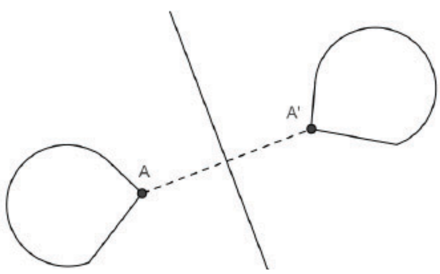


Problema 16 Las siguientes figuras son obtenidas, una de otra, por una reflexión. Encontrar el eje de simetría.



Solución

Teniendo en cuenta las formas de las figuras, se distinguen dos puntos *A* y *A’* que deben corresponderse mediante la reflexión.

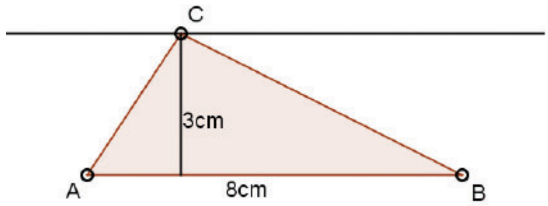


En consecuencia, el eje de la reflexión es la mediatriz del segmento *AA’*.

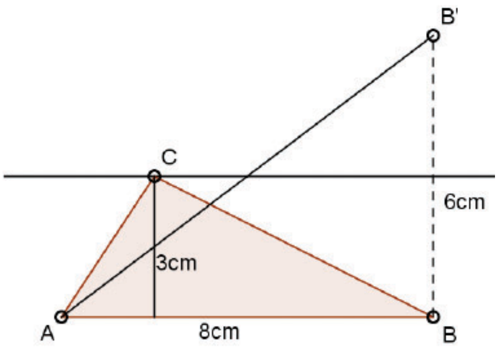
Problema 17 Entre los perímetros de los triángulos que tienen un lado de *8cm* y área *12 cm*^{2}, ¿Cuánto es el menor posible?

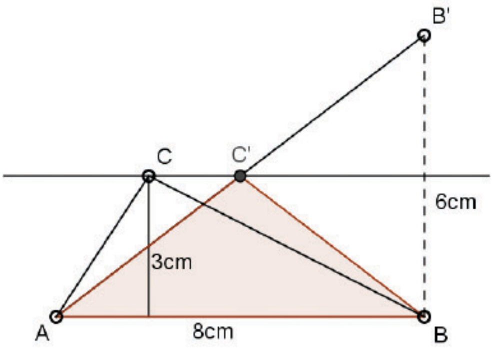
Solución

Si consideramos el lado *AB* de *8cm*, la altura correspondiente tiene que ser de *3cm*.



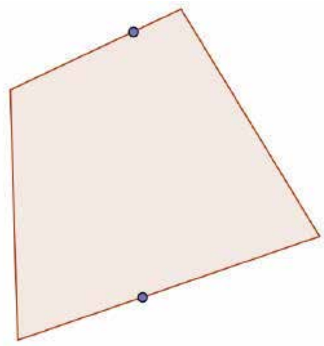
Esta situación se cumple mientras el punto a *C* pertenezca una la recta paralela a *AB* ubicada a *3cm* de distancia del lado *AB*. El perímetro será mínimo cuando sea mínima la suma *AC* + *CB*. Por el *principio de la reflexión,* el menor valor de esta suma está dado por la longitud del segmento *AB'*, donde *B'* es simétrico de *B* respecto de la recta que pasa por *C*





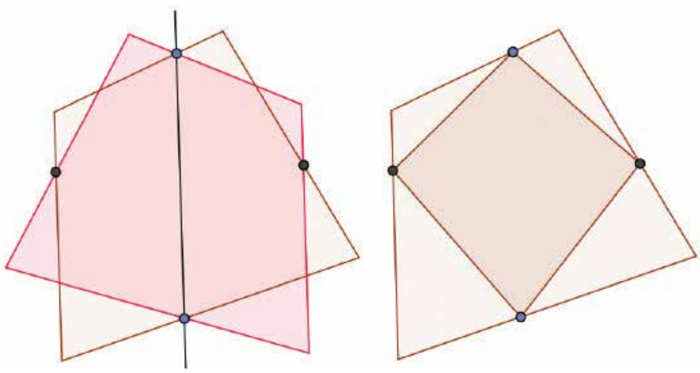
Por el Teorema de Pitágoras se tiene que *AB' = 10cm*, de manera que el perímetro mínimo es *18cm* y es el del triángulo *AC'B*.

Problema 18 Inscribir un romboide en el cuadrilátero dado de modo que dos de sus vértices sean los puntos marcados.



Solución

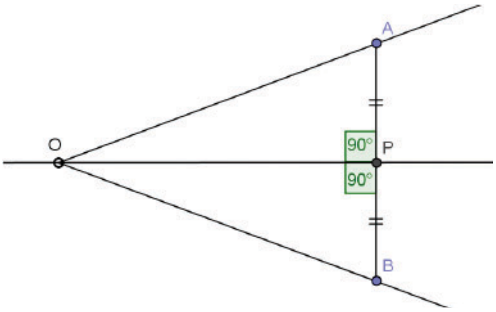
Un romboide es simétrico respecto de la recta que contiene a una de sus diagonales. Los puntos marcados serán los extremos de una diagonal del romboide buscado. Si simetrizamos el cuadrilátero respecto de la recta que une estos puntos, tendremos los candidatos para los vértices restantes del rombo.



Problema 19 Mostrar que los lados de un ángulo son simétricos respecto de la recta que contiene a la bisectriz del mismo.

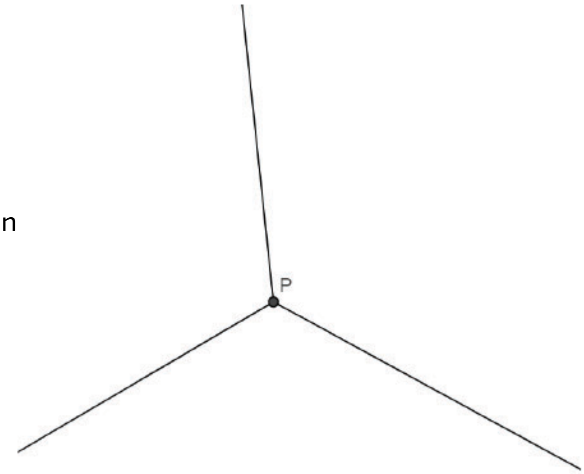
Solución:

Si desde un punto A en un lado de un ángulo con vértice O se traza una recta perpendicular a la bisectriz, ésta corta a la bisectriz en el punto P y al otro lado del ángulo en el punto B.



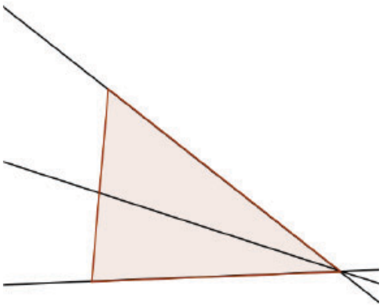
Para mostrar que A y B son simétricos respecto de la bisectriz, es preciso establecer que $AP = PB$. Los triángulos BOP y AOP tienen dos ángulos iguales y el lado OP, adyacente a estos ángulos es común a ambos triángulos, entonces son triángulos iguales, es decir $AP = PB$.

Problema 20 Desde un punto P parten tres semirrectas. Construir un triángulo con un vértice sobre cada semirrecta de modo que P sea el punto de intersección de las bisectrices del triángulo.

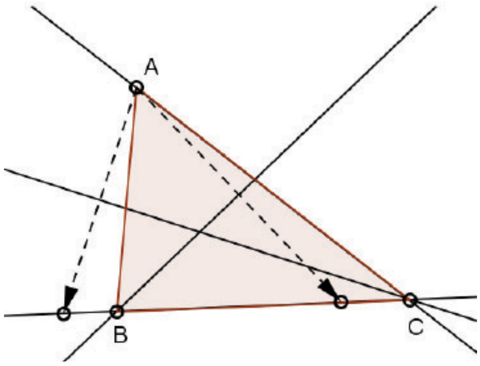


Solución

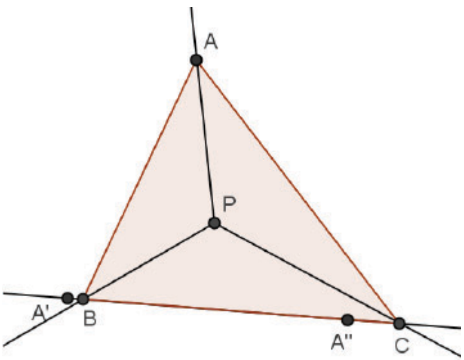
Las prolongaciones de dos lados de un triángulo son simétricas respecto de la bisectriz en el vértice común a estos lados.



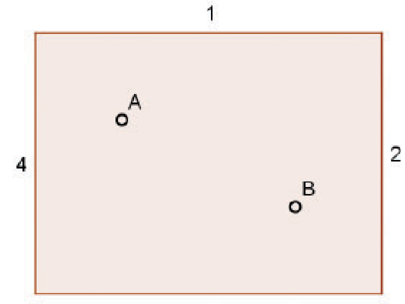
De modo que, si el vértice A se refleja respecto de las bisectrices en los vértices B y C, sus imágenes caen en la recta que une B con C.



Para resolver el problema, tomamos un punto A sobre una de las semirrectas y lo reflejamos respectos de las rectas que contienen a las otras semirrectas para determinar la recta que contiene al lado BC.



Problema 21 En teoría, las bolas de un billar se mueven en la mesa siguiendo el *principio de la reflexión,* es decir, para ir de un punto a otro siguen el camino más corto posible. ¿En qué dirección y sentido debe salir una bola *A* para golpear en forma plena a la bola *B*, en las condiciones siguientes?



i) Toca la banda 1 luego toca B.

ii) Toca la banda 1, luego la banda 2 y finalmente B.

iii) Toca la banda 4, la banda 2 y luego B.

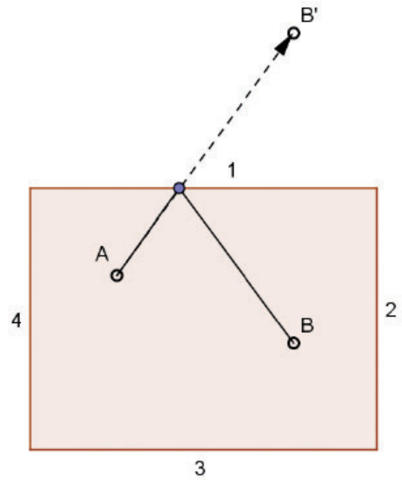
iv) Toca sucesivamente las bandas 4, 1, 3 y luego B.

v) Toca las cuatro bandas y luego B.

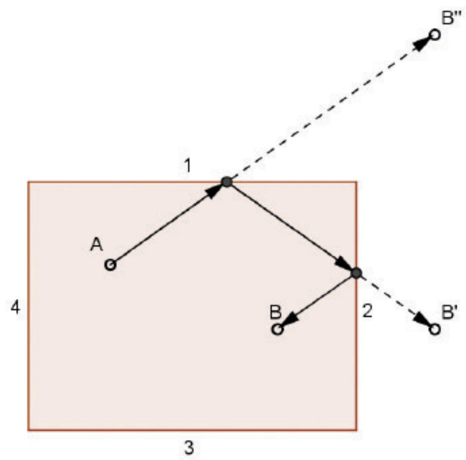
Comentario: Se ha usado la frase *golpear en forma plena*, con esto se quiere decir que el centro de la bola que se va a golpear se encuentra en la línea de movimiento que describe el centro de la bola que la golpeará, de esta manera, las bolas se pueden pensar como puntos.

Solución

La condición *i)*, es exactamente la del principio de la reflexión, la bola *A* debe ir hasta la bola *B* tocando la banda *1* por el camino más corto posible, la solución es apuntar al punto *B'* simétrico de *B* respecto de la recta que determina la banda 1.



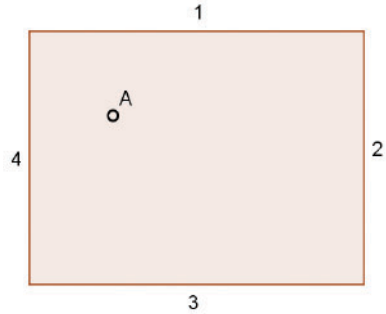
Para la condición *ii)* usaremos el principio de la reflexión dos veces. Consideramos el punto *B'* simétrico de *B* respecto de la recta que determina la banda *2* y *B"* el simétrico de *B'* respecto de la recta que determina la banda *1.*



Apuntando a *B"*, la bola llegará a la banda *1* y se desviará en la dirección de *B'*, luego, al llegar a la banda *2*, se desviará hacia B.

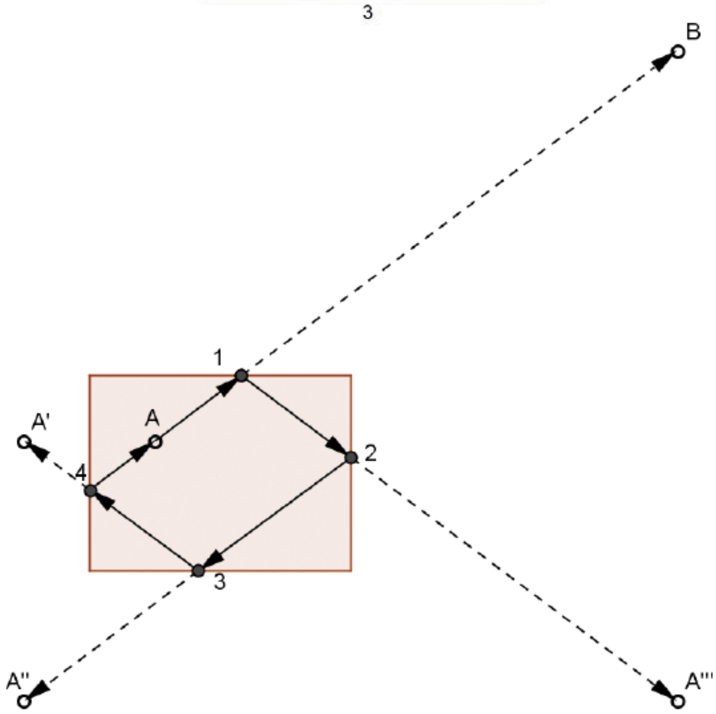
Los casos restantes se dejan como desafío para el lector.

Problema 22 Dar una dirección y sentido, si existe, en la que deba salir la bola de billar *A* para volver a su posición luego de tocar una vez en cada una de las cuatro bandas.

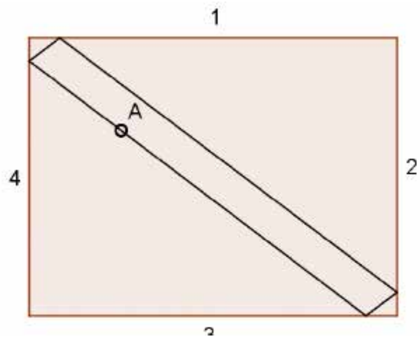


Solución

En la figura, hemos buscado una solución usando el principio de la reflexión cuatro veces.



En este caso, se buscó que el recorrido sea banda *1*, banda *2*, banda *3* y banda *4*. Este recorrido también puede hacerse en sentido contrario. Buscando otras posibilidades encontramos el siguiente recorrido, tomado en ambos sentidos:



Las soluciones se obtendrán reflejando el puno *A* respecto de las cuatro bandas en todos los órdenes posibles, que son *24*, sin embargo, sólo se obtendrán cuatro soluciones, que son las dos anteriores si se consideran en ambos sentidos. Si denotamos con *a, b, c, d* las reflexiones respecto de las bandas 1, 2, 3, 4 respectivamente, puede comprobarse que:

$$ab = ba$$

es decir que el resultado de:

reflejar un punto respecto de la banda 1 y luego reflejar el punto obtenido, respecto de la banda 2,

es el mismo que:

reflejar el punto respecto de la banda 2 y luego reflejar el punto obtenido, respecto de la banda 1.

Otras identidades válidas son: $ad = da$, $bc = cb$, $cd = dc$. Con estas igualdades, puede establecerse que las reflexiones sucesivas listadas a continuación coinciden.

$$abcd = bacd = abdc = acbd = badc = bdac$$

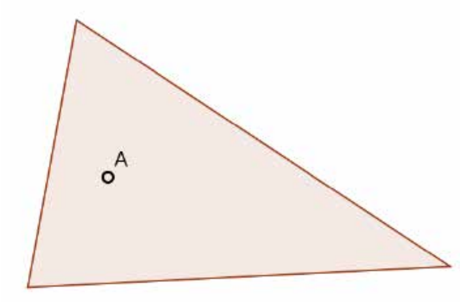
$$dcba = dcab = cdba = dbca = cdab = cadb$$

$$adbc = adcb = dabc = acdb = dbac = dacb$$

$$cbda = bcda = cbad = bdca = cabd = bcad$$

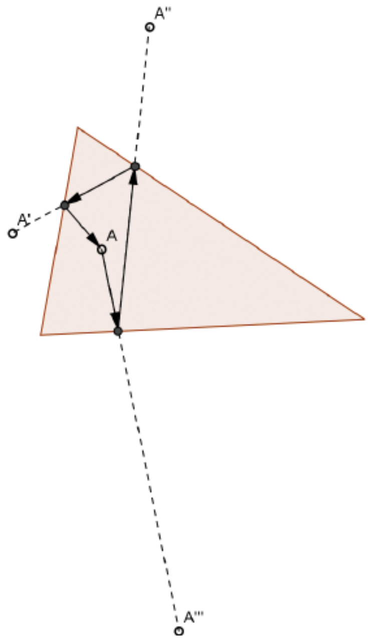
Finalmente, observamos que en ambos recorridos tienen sus lados paralelos a las diagonales, ¿puede encontrar el motivo de esta propiedad? ¿Qué longitud tiene el recorrido en relación con las dimensiones de la mesa de villar?

Problema 23 Análogo al problema 22 pero con una mesa triangular como en la figura.



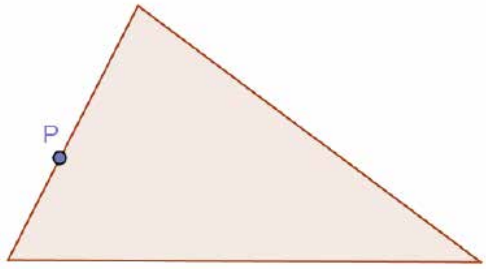
Solución

Reflejando el punto sucesivamente respecto de las rectas determinadas por los lados del triángulo, obtenemos las soluciones, por ejemplo:



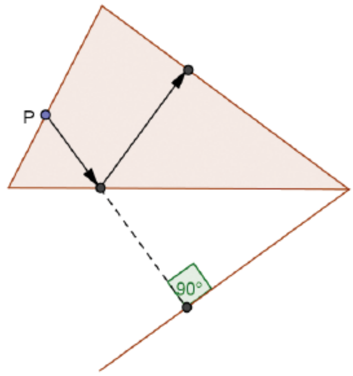
En principio hay seis soluciones, dado que hay seis maneras de ordenar las tres reflexiones consideradas. ¿Qué pasa si el triángulo es rectángulo?

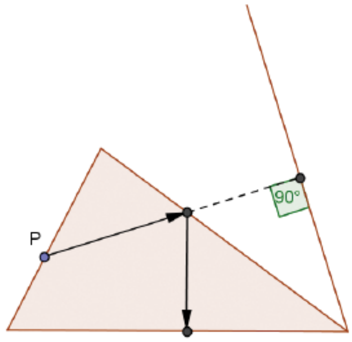
Problema 24 Encontrar el camino más corto que parte desde el punto *P* y pasa por los lados del triángulo que no contienen a *P*.



Solución

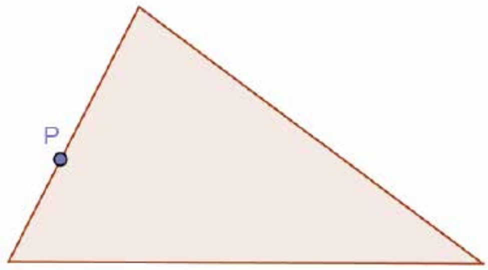
Según en qué orden se pase por los lados que no contienen a *P*, las soluciones se construyen usando el principio de la reflexión.





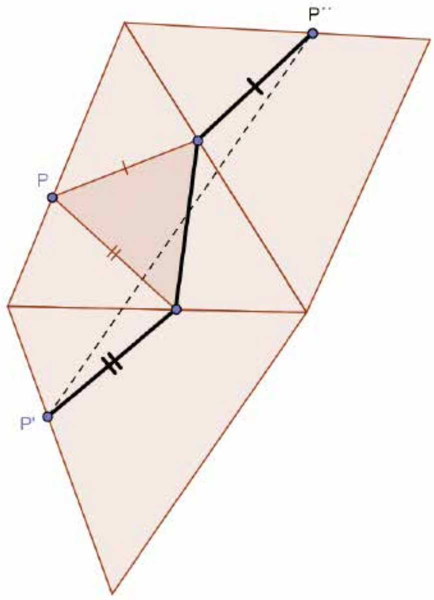
Se refleja uno de estos lados respecto del otro y sobre el segmento obtenido se busca el punto más próximo a *P*, este punto dará la dirección en la que se ver partir.

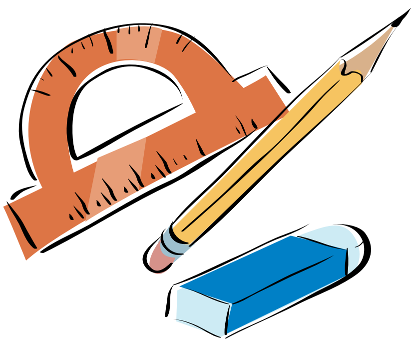
Problema 25 Inscribir un triángulo en el triángulo dado de modo que *P* sea uno de sus vértices y su perímetro del menor valor posible.



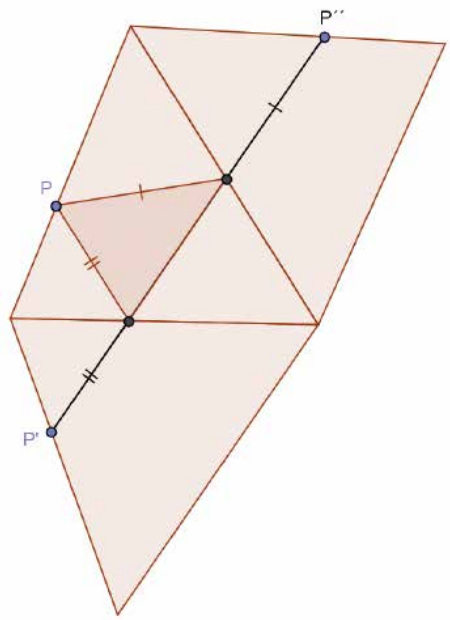
Solución

Si *P’* y *P”* son los simétricos de *P* respecto de los lados del triángulo que no contienen a *P*:

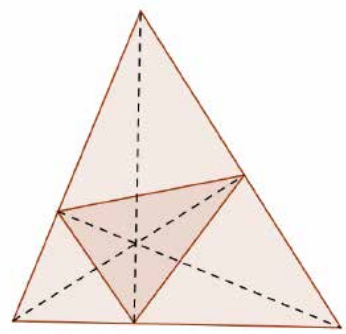




El perímetro de un triángulo inscripto que pase por *P* será igual a la longitud de la poligonal marcada en la figura. Para obtener el triángulo de menor perímetro posible, tomamos aquél cuyo perímetro es igual a la longitud del segmento que une *P’* con *P”*.



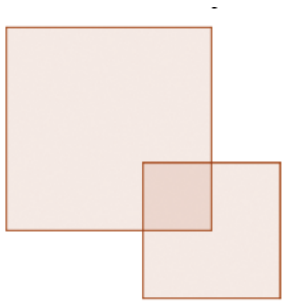
Comentario: En un triángulo acutángulo, el triángulo cuyos vértices son los pies de las alturas del triángulo se llama *triángulo órtico*. En el apéndice se presentan algunas propiedades sobre este triángulo.



Entre los problemas propuestos, se pedirá al lector que use un programa interactivo para ver el comportamiento del perímetro del triángulo órtico en relación con el perímetro de otro triángulo inscripto.

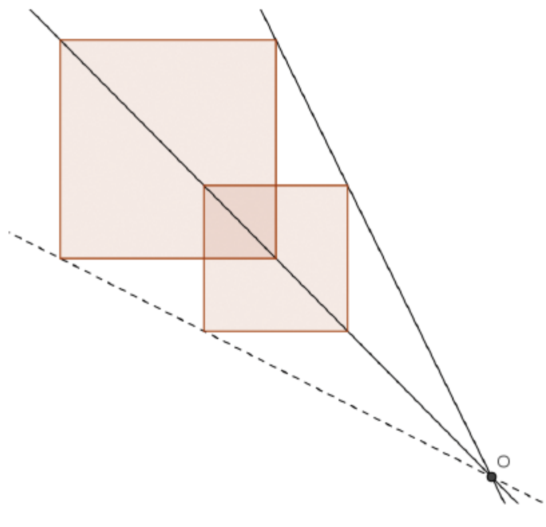
Problema 26

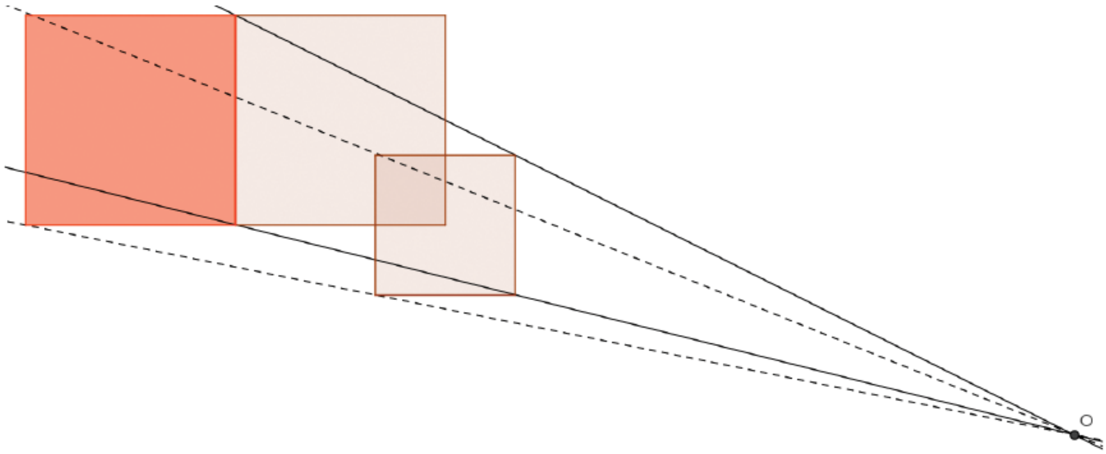
Partiendo de la siguiente figura, hallar el centro de la homotecia que transforma el cuadrado menor en el cuadrado mayor.



Solución

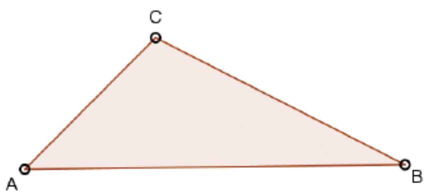
Dado que por una homotecia, un segmento se transforma en otro paralelo al mismo, un lado vertical de un cuadrado deberá transformarse en un lado vertical del otro. Por lo tanto hay dos posibilidades que se indican a continuación.





En el primer caso el centro encontrado, corresponde a la homotecia en la situación del problema. En el segundo, la homotecia transforma el cuadrado menor en el nuevo cuadrado que aparece en la figura.

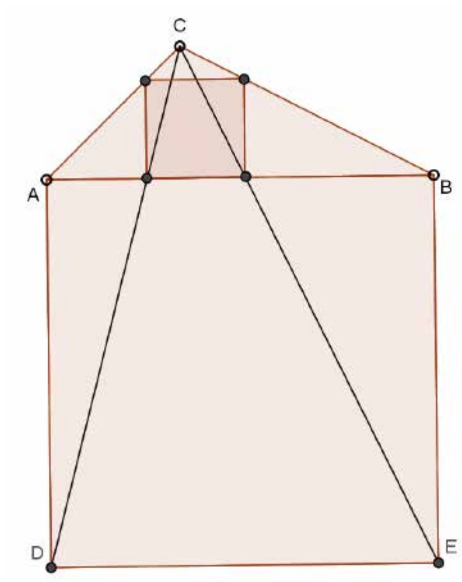
Problema 27 Inscribir un cuadrado en el triángulo dado que tenga dos de sus vértices sobre el lado *AB*.



¿Se puede hacer lo mismo, pero sobre el lado *BC*?

Solución

Si dibujamos el cuadrado externo *ADEB* sobre el lado *AB*,

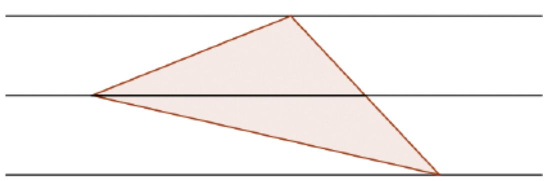


los segmentos *CD* y *CE* cortan a *AB* en dos puntos que sirven como vértices para el cuadrado buscado. La justificación se obtiene considerando semejanza de triángulos.

Problema 28 En la hoja de cuaderno quedan libre los últimos tres renglones, se desea dibujar un triángulo cuyos ángulos miden *45°*, *60°* y *75°*, poniendo un vértice encada renglón. ¿Es esto posible? ¿Cómo lo conseguiría?

Solución

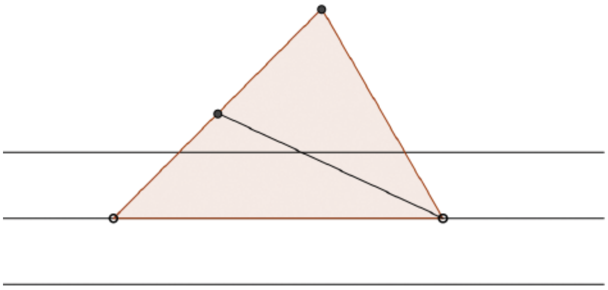
Es conveniente notar que cualquier triángulo con sus vértices en tres renglones consecutivos



necesariamente tiene una de sus medianas sobre segundo renglón, ésta es precisamente la que parte desde el vértice en este renglón. La razón de esta afirmación es que el segundo renglón descompone al triángulo en dos triángulos de igual área, dado que éstos comparten un lado y las alturas correspondientes son iguales a la distancia entre dos renglones consecutivos.

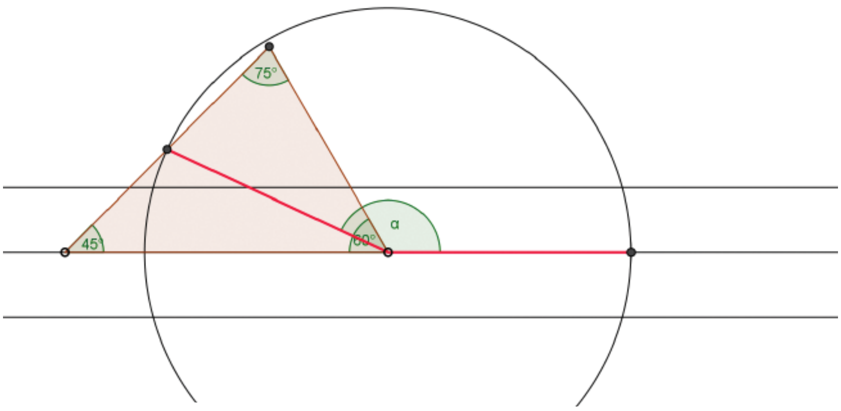
Después de esta observación, la solución puede obtenerse como sigue.

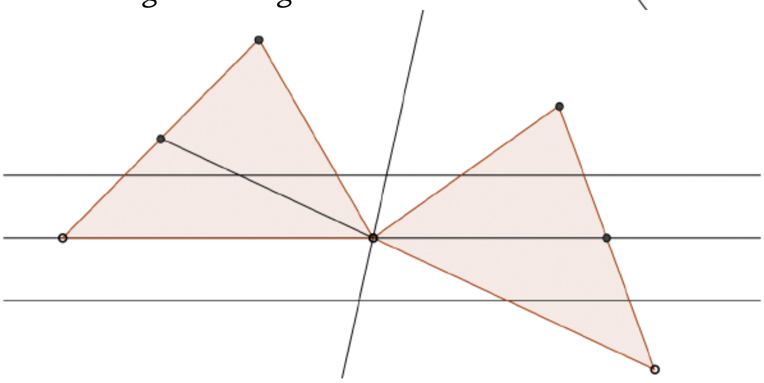
Se dibuja un triángulo con los ángulos indicados, apoyando dos vértices en el segundo renglón.



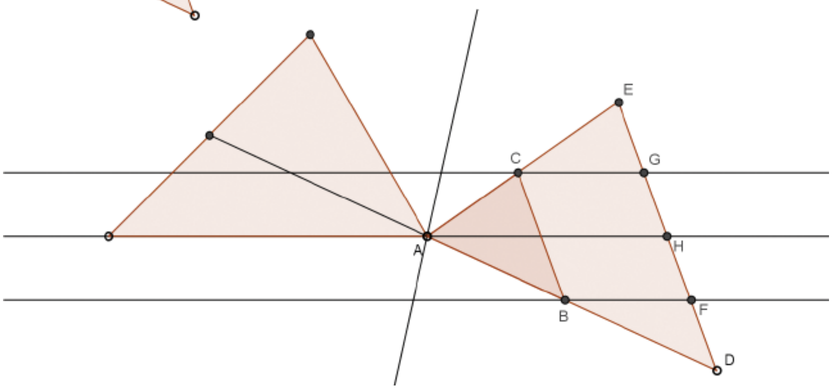
La mediana que parte de uno desde uno de estos vértices se dibuja sobre el segundo renglón como lo muestra la figura,

La bisectriz del ángulo que forma la mediana con el segundo renglón, sirve para reflejar este triángulo en uno con la mediana sobre el segundo renglón.





El triángulo ABC dado en la figura



tiene el lado BC paralelo a DE , para ver esto bastará mostrar que $CG = BF$ de modo que $BFGC$ será un paralelogramo. Dado que $EH = HD$ y $GH = HF$ resulta $EG = DF$. De la semejanza entre los triángulos AHE y CGB y entre los triángulos AHD y BFD se tiene:

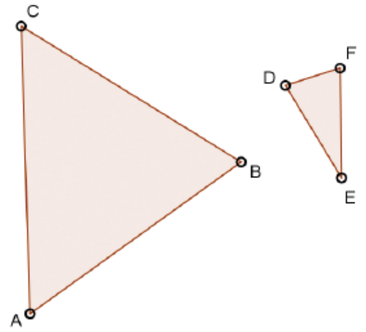
$$\frac{CG}{AH} = \frac{EG}{EH} = \frac{FD}{DH} = \frac{BF}{AH}$$

de donde surge que $CG = BF$.

Finalmente, como BC y DE son paralelos, los triángulos ABC y ADE son semejantes, luego tienen los mismos ángulos.

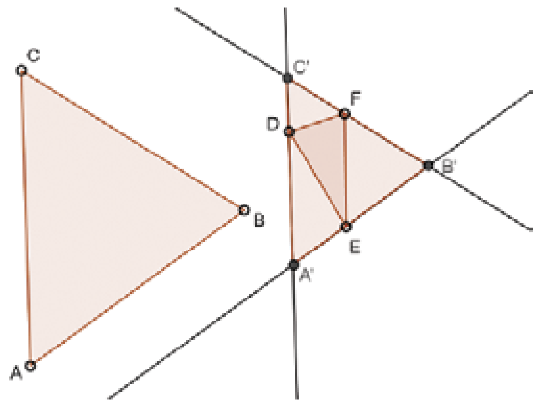
Problema 29

Inscribir un triángulo en el triángulo *ABC* de modo que sus lados sean paralelos a los lados del triángulo *DEF*.

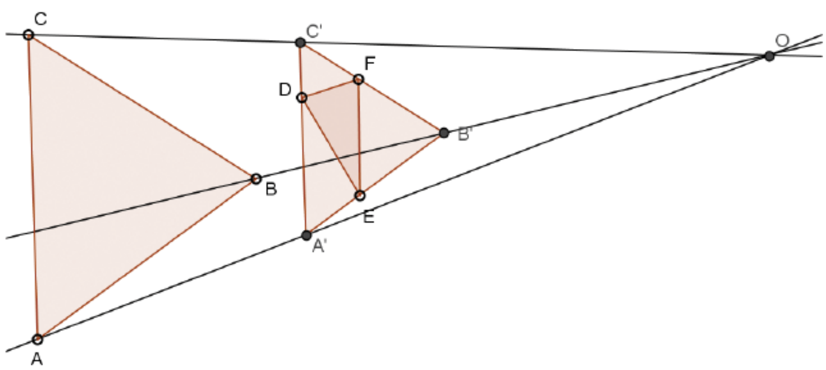


Solución

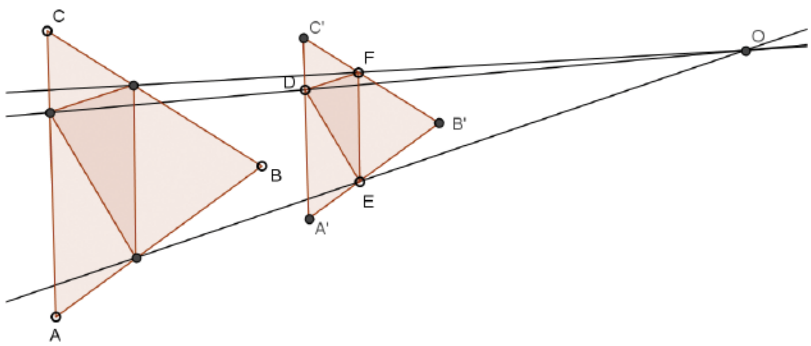
Si por los vértices de *DEF*, trazamos paralelas a los lados *AC*, *AB* y *BC* respectivamente, inscribimos el triángulo *DEF* en un triángulo *A'B'C'* que es semejante a *ABC*.



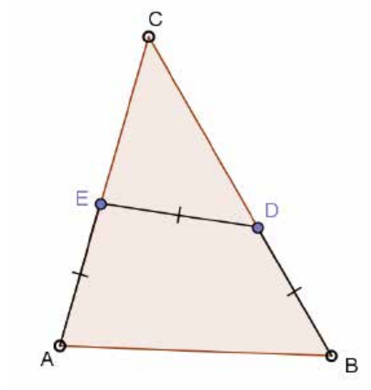
Buscamos el centro de homotecia O para los triángulos *ABC* y *A'B'C'*



Construimos la imagen de *DEF* sobre *ABC* usando la homotecia

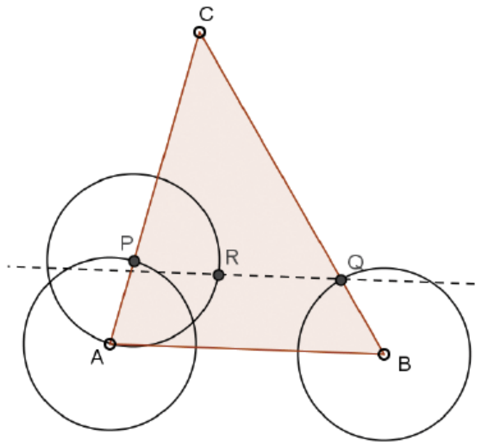


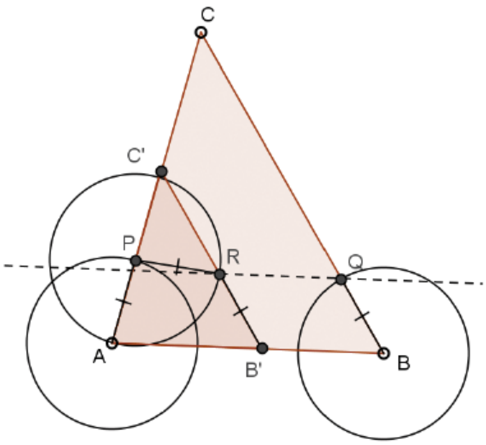
Problema 30 Hallar una poligonal *AEDB* sobre el triángulo *ABC* como en la figura, tal que *AE*=*ED*=*DB*.



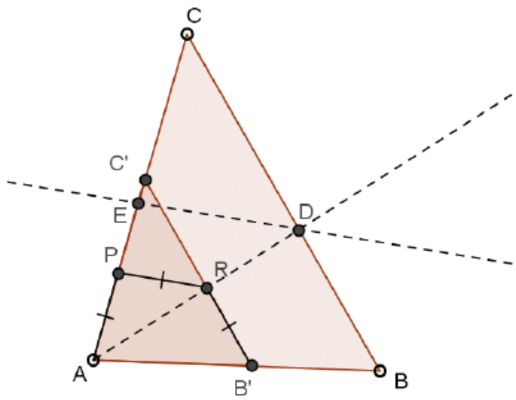
Solución

Fijamos un radio menor que los lados del triángulo y trazamos las circunferencias con dicho radio como se indica en la figura:



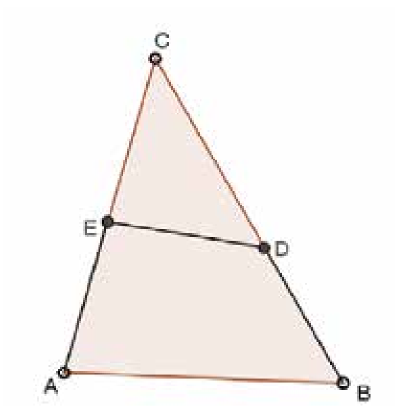


Con centro en *A* determinamos *P* sobre *AC*, con centro en *B* determinamos *Q* sobre *BC*. Una paralela a *AB* por el punto *Q* corta a la circunferencia con centro *P* en el punto *R*. Trazamos una paralela a *BC* por el punto *R* para determinar el triángulo *AB'C'* semejante a *ABC*.



Por la construcción, el problema está resuelto para el triángulo *AB'C'* semejante a *ABC*. Con la homotecia con centro en *A* podemos determinar *D* sobre el lado *BC* y con una paralela a *PR* que pase por *D*, encontramos *E* sobre el lado *AC*.

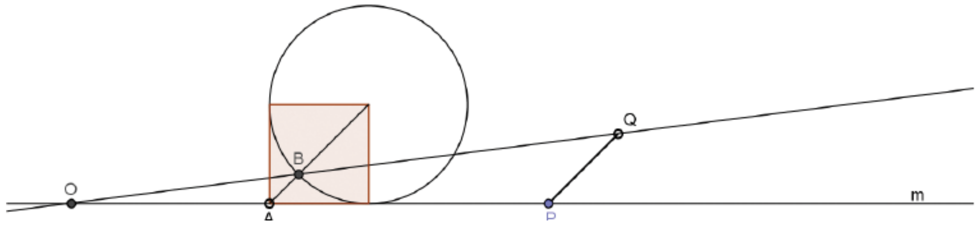
De este modo, encontramos la solución al problema:



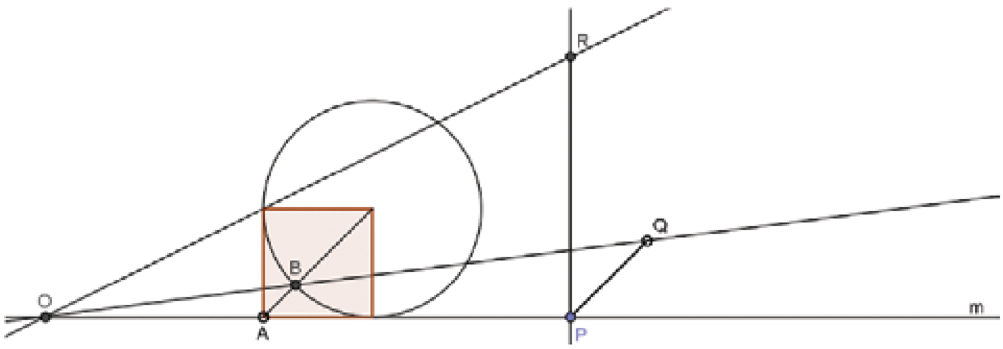
Problema 31 Construir un cuadrado dada la diferencia entre su diagonal y su lado.

Solución

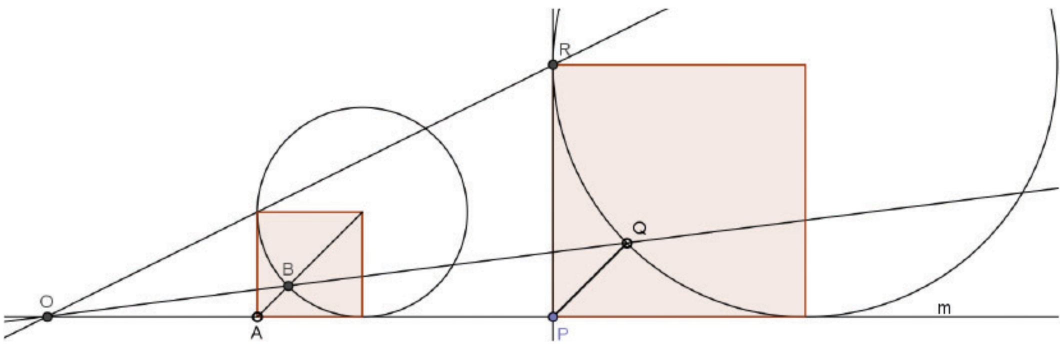
Sobre una recta *m* dibujamos un cuadrado y tomamos sobre su diagonal el segmento *AB* cuya medida es la diferencia entre la diagonal y el lado del cuadrado. Con un extremo en la recta *m*, ubicamos el segmento *PQ* paralelo a *AB* y cuya medida es la diferencia entre la diagonal y el lado del cuadrado que queremos construir. La recta que une *B* con *Q* corta a *m* en el punto *O*.



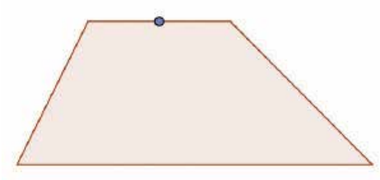
Trazamos una perpendicular a *m* por el punto *P* y usamos *O* como centro de homotecia para determinar el lado *PR* del cuadrado buscado sobre la perpendicular a *m*.



Construimos el cuadrado partiendo de su lado *PR*



Problema 32 En el trapecio de la figura está marcado el punto medio de una base. Indicar cómo es posible construir el punto medio de la otra base usando sólo una regla (sin graduar).

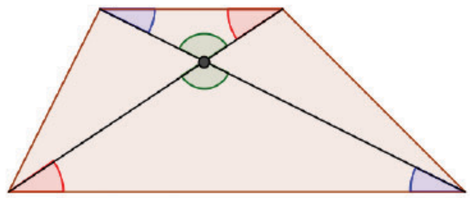


Solución:

Vamos a introducir la siguiente propiedad que ayudará a resolver el problema.

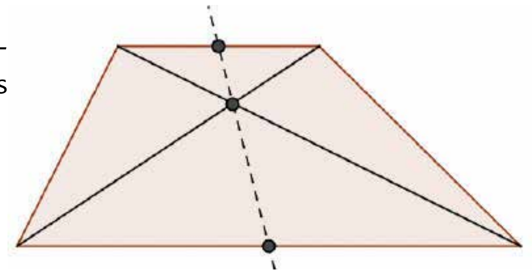
En todo trapecio las diagonales y la línea que une puntos medios de las bases son concurrentes.

En efecto, las diagonales del trapecio delimitan dos triángulos semejantes, como lo muestra la figura.

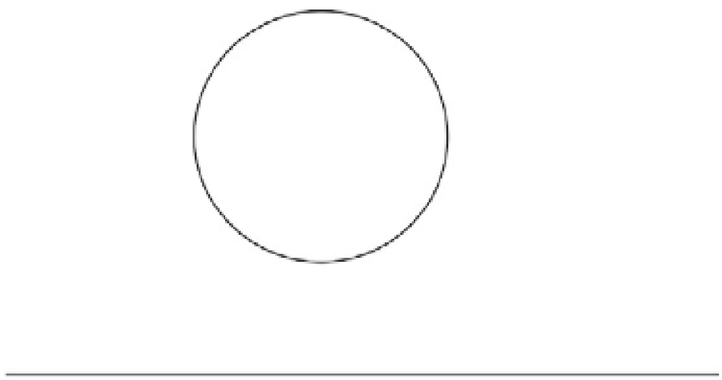


El centro de la homotecia que relaciona estos triángulos semejantes, es decir la intersección de las líneas que unen pares de puntos homólogos, es precisamente el punto en la intersección de las diagonales. Esta homotecia transforma el punto medio de una base en el punto medio de la otra base, luego, ambos puntos medios y el centro de la homotecia están alineados.

Ahora la solución al problema es simple: trazamos las diagonales y por el punto de intersección de éstas trazamos una recta que pase por el punto medio dado.

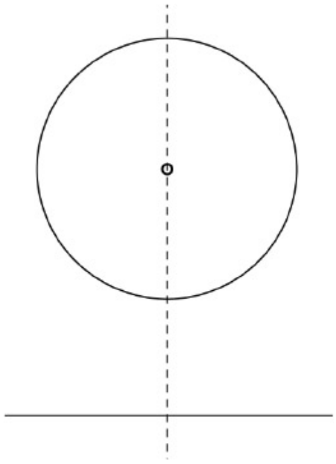


Problema 33 Construir todos los cuadrados que tengan dos de sus vértices en la circunferencia y los otros dos sobre la recta dadas en la figura.

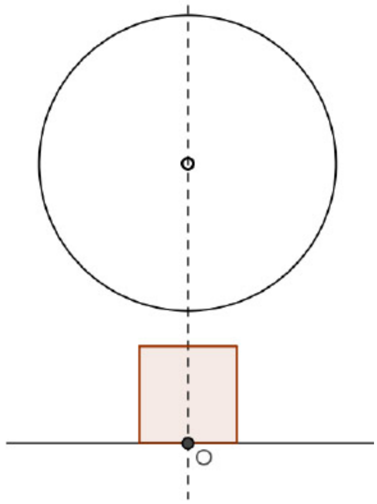


Solución

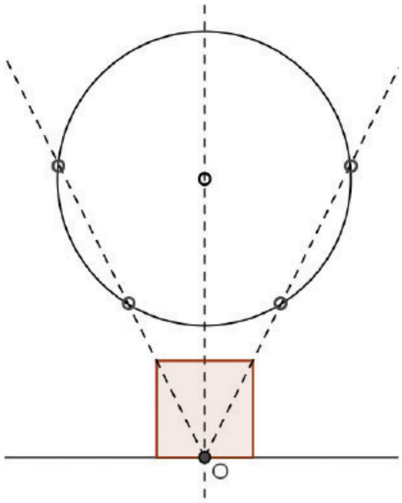
Dos vértices del cuadrado estarán sobre la recta, estos vértices no pueden ser opuestos, por que los vértices restantes quedarían uno en cada semiplano que determina la recta. En consecuencia, un lado del cuadrado estará sobre la recta y el lado opuesto será una cuerda de la circunferencia paralela a la recta. De manera que la mediatriz de esta cuerda pasa por el centro de la circunferencia y es perpendicular a la recta.

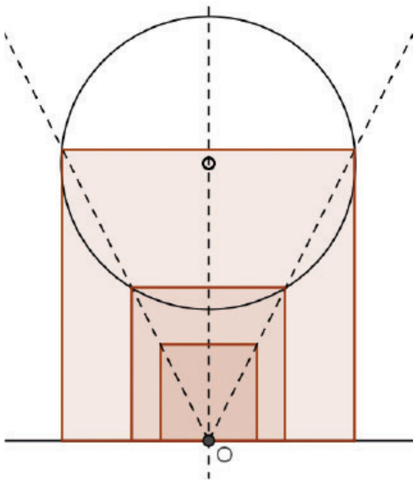


Esta mediatriz también pasará por el cetro del cuadrado. Los cuadrados buscados serán homotéticos al cuadrado auxiliar que dibujamos apoyado en la recta, con *O* el centro de homotecia en la intersección de la mediatriz con la recta dada.

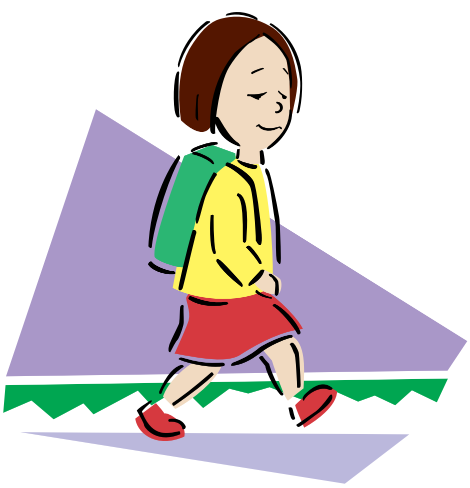


Para encontrar las soluciones, consideramos los puntos en las semirrectas que parten de *O* y pasan por los vértices del cuadrado auxiliar que no están en la recta.

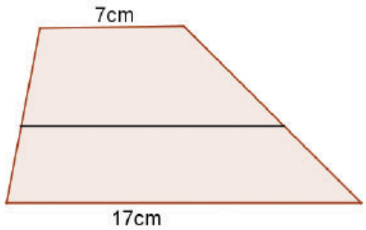




De esta manera obtenemos las cuerdas en la circunferencia que son lados de los cuadrados buscados.

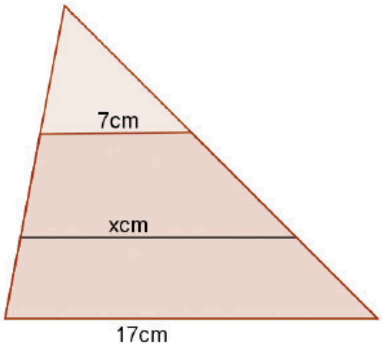


Problema 34 Las bases de un trapecio miden *7cm* y *17cm* respectivamente. Un segmento paralelo a las bases secciona el trapecio en dos trapecios de igual área. Hallar la longitud de este segmento.



Solución

Prolongamos los lados opuestos del trapecio para formar un triángulo.



Quedan determinados tres triángulos semejantes *R*, *S* y *T* con bases homólogas de *17cm*, *xcm* y *7cm*, donde x es el valor a determinar. Indiquemos con *r, s* y *t* las áreas de *R, S* y *T* respectivamente. Como estos triángulos son semejantes, podemos decir que:

$$s = \left(\frac{x}{17}\right)^2 r \qquad t = \left(\frac{7}{17}\right)^2 r$$

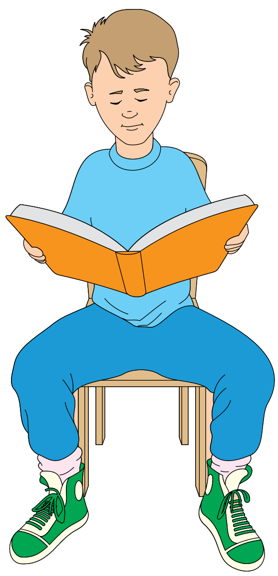
Como debe ser $s - t = r - s$, resulta $s = \dfrac{t+r}{2}$ o bien:

$$\left(\frac{x}{17}\right)^2 r = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{7}{17}\right)^2 + 1\right) r$$

De modo que;

$$x^2 = \frac{7^2 + 17^2}{2} = 13^2$$

y resulta $x = 13$.



Resultados aplicables a la resolución de los problemas

Transformaciones geométricas del plano

Las transformaciones que se describen en este apartado, son llamadas transformaciones geométricas del plano. Estas trasformaciones se han usado en la resolución de los problemas presentados al comienzo de estas notas.

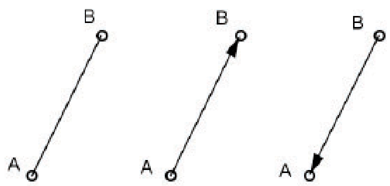
Traslación paralela

La traslación paralela, o simplemente traslación, es la transformación asociada a un segmento orientado. Cuando un segmento se recorre desde uno de sus extremos hasta el otro, se suele indicar este sentido del recorrido con una flecha sobre el par de letras que denotan sus extremos.

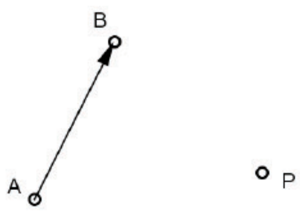
La notación $\overrightarrow{AB}$, indica que el segmento se recorre desde A hacia B. Si se ha señalado el sentido del recorrido, el segmento se llama entonces, *segmento orientado* o *vector*.

Para visualizar el movimiento que produce una traslación en el plano, mostramos cómo se transforman algunas figuras geométricas por una traslación asociada al segmento orientado $\overrightarrow{AB}$. Para la representación geométrica de segmentos orientados, se usan flechas.

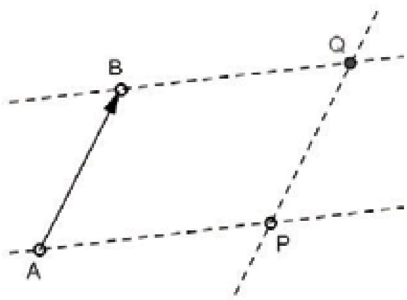
La siguiente figura ilustra la representación de un mismo segmento, el primero no orientado, el segundo y tercero, orientados en sentidos opuestos.



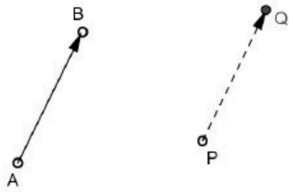
Fijado el segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, a continuación indicamos cómo se traslada o transforma un punto P del plano. A partir de los datos en la figura:



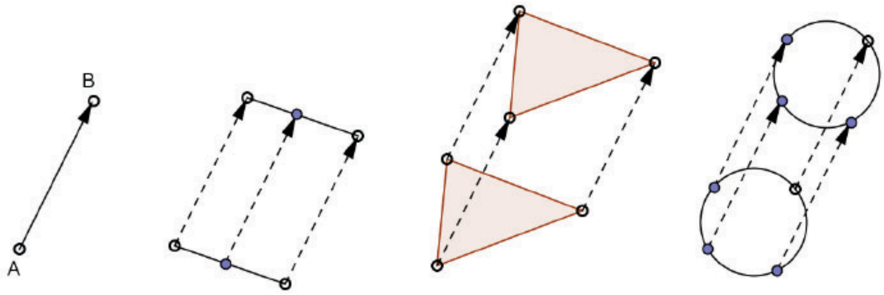
Se traza la recta AP, por B una paralela a AP y por P una paralela a AB para formar el paralelogramo $APQB$.



La traslación asociada al segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, transforma el punto P en el punto Q. una manera de visualizar la traslación es pensar que P se desplazó hasta Q conforme la dirección, el sentido y la longitud del segmento orientado $\overrightarrow{AB}$.

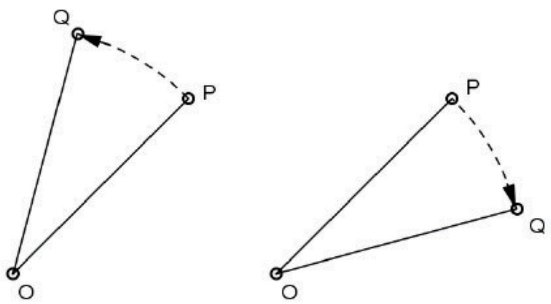


De esta manera, podemos ver en qué se transforma una figura transformando cada uno de sus puntos, por ejemplo un segmento, un triángulo, una circunferencia.

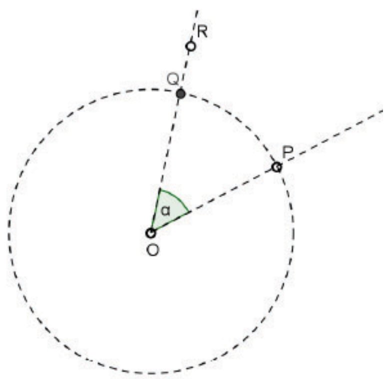


La rotación

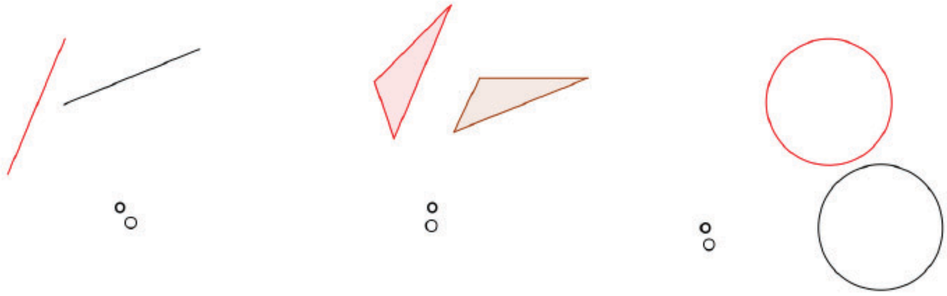
La rotación es una transformación asociada con un punto O y un ángulo orientado α previamente fijados. El punto O se llama *centro de la rotación* y el ángulo α, *ángulo de la rotación*. La rotación transforma un punto P del plano en un punto Q, de modo que $\overline{PO} = \overline{QO}$ y el ángulo $POQ = \alpha$. La orientación de α puede ser en sentido *horario o anti horario*. Por ejemplo, en la figura se muestra el efecto sobre el punto P de una rotación, con centro O y ángulo α, en sentido antihorario en el primer caso y sentido horario en el segundo.



Para obtener el punto Q gráficamente, se dibuja el ángulo POR con el valor y la orientación de α y se toma la intersección entre la semirrecta OR y la circunferencia con centro O que pasa por P.

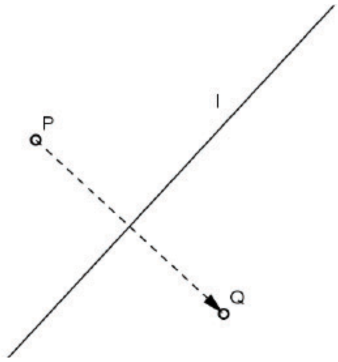


A continuación, se ilustra cómo transforma una rotación con centro *O* y ángulo de *45º* y sentido anti horario, un segmento, un triángulo, una circunferencia.

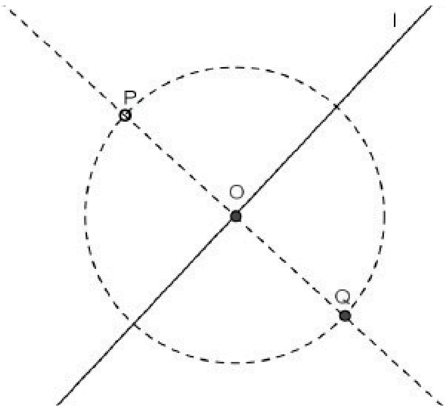


La reflexión o simetría respecto de una recta.

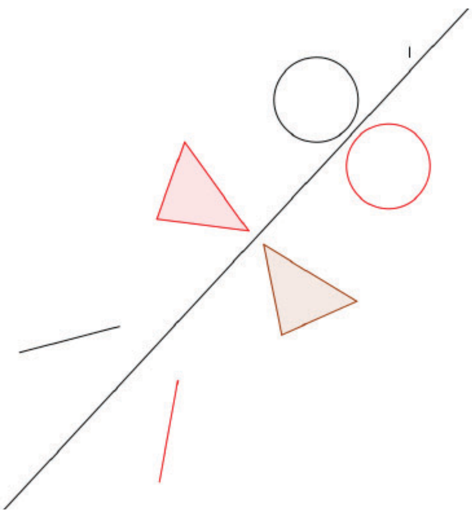
Esta transformación se asocia con una recta *l* dada, llamada *eje de simetría*. Cada punto *P* del plano se transforma en el punto *Q* de modo que *l* sea la mediatriz del segmento *PQ*.



Para obtener el punto *Q* gráficamente, se traza la recta *m* perpendicular a *l* que pasa por *P*. Con centro en el punto *O*, intersección de *m* y *l*, se traza la circunferencia que pasa por *P*. El punto *Q* es el punto, distinto de *P*, en la intersección de *m* y la circunferencia.

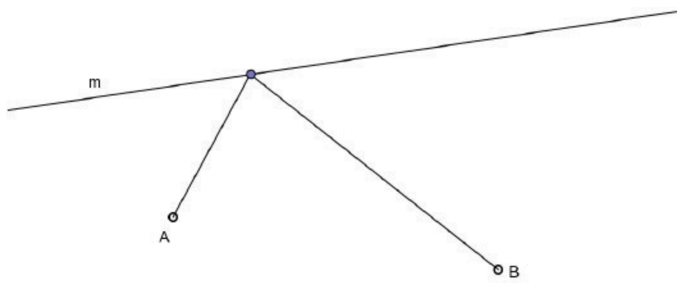


Los ejemplos siguientes muestran cómo se simetrizan o reflejan algunas figuras geométricas respecto de la recta *l*.

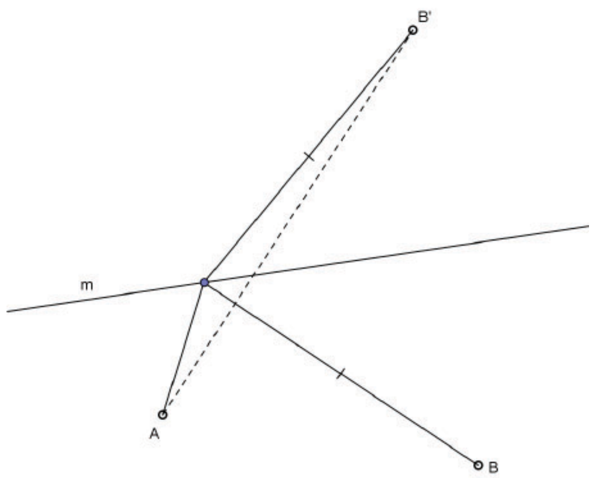


El principio de la reflexión

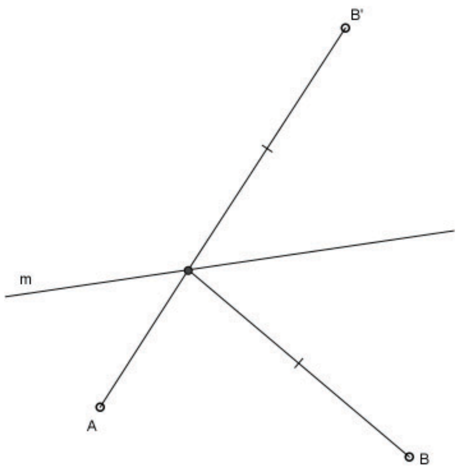
Un clásico problema asociado con la reflexión es el de encontrar el camino más corto para ir desde un punto *A* hasta un punto *B* pasando por algún punto de una recta *m*.



La solución para este problema puede obtenerse usando la reflexión respecto de la recta *m*. Si reflejamos el punto *B* respecto de esta recta, podremos comparar la longitud de un camino dado con la longitud del segmento *AB’* que se muestra en la figura:



Queda claro que el camino más corto es el que tenga la distancia que hay entre *A* y *B’*.



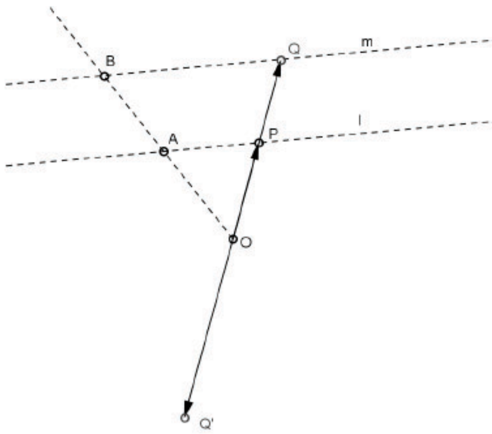
La homotecia

Esta transformación se asocia con un punto *O* llamado *centro de la homotecia* y un número no nulo *r* llamado *razón de la homotecia.* El punto *P* se transforma en el punto *Q* de la recta *OP* de modo tal que:

$$\frac{\overrightarrow{OQ}}{\overrightarrow{OP}} = r \, .$$

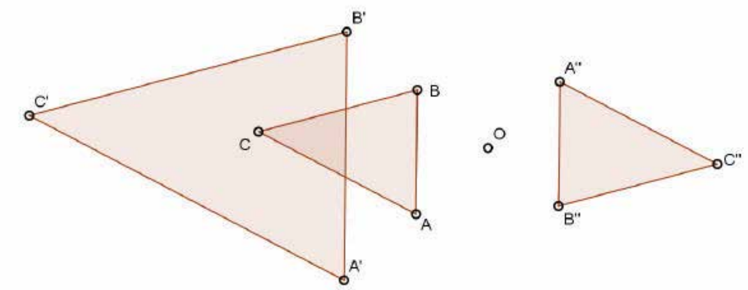
La razón puede ser un número positivo o negativo. En el primer caso, los segmentos *OP* y *OQ* se asumen orientados en el mismo sentido, mientras que en el segundo caso, los segmentos se consideran orientados en sentidos opuestos.

La siguiente figura ilustra las homotecias con centro *O* y razones *r* y –*r* donde *r* está dado por la longitud de un segmento.



Se construye una semirrecta *OA* de modo que el segmento *OA* sea de longitud *1*. Sobre esta semirrecta se toma el punto *B* tal que *OB* tenga longitud *r*. Por los puntos *A* y *P* se traza la recta *l* y por el punto *B* la recta *m* paralela a *l*. El punto *Q* en la intersección de *l* con la semirrecta *OP* es el punto en que se transforma *P* por la homotecia con centro O y razón *r*. Por otra parte, el punto *Q'* simétrico de *Q* respecto de O, es el punto en que se transforma *P* por la homotecia con centro *O* y razón –*r*.

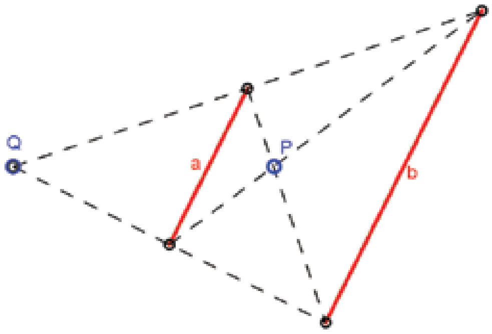
La siguiente figura muestra cómo se transforma el triángulo *ABC* respecto de la homotecias con centro *O* y razón *2* en el triángulo *A'B'C'* y cómo se transforma el triángulo *ABC* respecto de la homotecia con centro *O* y razón –*1* en el triángulo *A"B"C"*.



En conveniente destacar las siguientes propiedades.

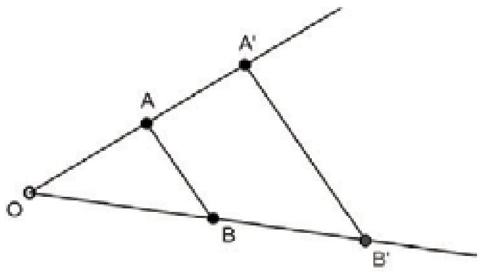
Dos segmentos paralelos pueden ser transformados uno en el otro mediante una homotecia.

En general hay dos homotecias, en la siguiente figura mostramos cómo obtener los centros de estas homotecias:



Uniendo con rectas los vértices de los segmentos paralelos *a* y *b*, encontramos dos puntos *P* y *Q*, que sirven como centros de homotecias que transforman un segmento en el otro. Este hecho puede justificarse usando el Teorema de Thales y los detalles se dejan para los desarrolle el lector.
¿En qué situación habrá una sola homotecia? ¿Cuál será su razón?

Una homotecia de razón r transforma un segmento s de longitud l en un segmento paralelo a s cuya longitud es l por el valor absoluto de r.



En la figura *O* es el centro de la homotecia, *A'* es el transformado de *A* y *B'* es el transformado de *B*. Dadas las relaciones:

$$\frac{A'O}{AO} = \frac{B'O}{BO} = r$$

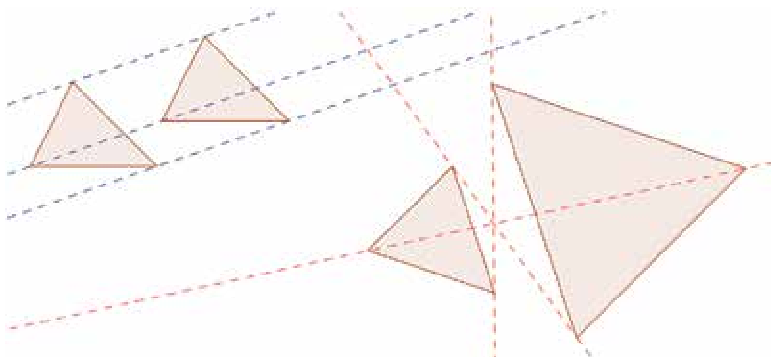
Por el Teorema de Thales, los segmentos *AB* y *A'B'* resultan paralelos y consecuencia los triángulos *AOB* y *A'OB'* son semejantes, de modo que:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'O}{AO} = \frac{B'O}{BO} = r$$

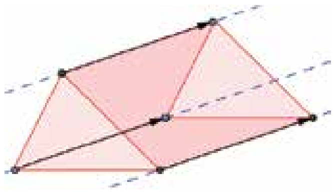
Un hecho destacado respeto de las homotecias es el siguiente.

Si los lados de un triángulo son paralelos a los lados de otro triángulo, entonces hay una transformación geométrica que lleva uno en el otro.

Es claro que en la situación del enunciado precedente, los triángulos son semejantes, y que lados homólogos deben ser paralelos. Las rectas que unen vértices homólogos serán paralelas o concurrentes como se muestra en la figura:

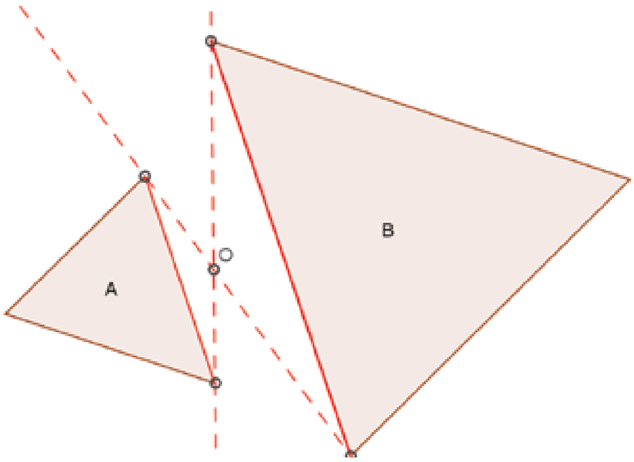


Notar que si la razón de semejanza es igual a 1, los lados homólogos son de igual longitud y como se asumen paralelos, son los lados opuestos de un paralelogramo conforme lo ilustra la figura:



Queda claro que, en este caso, una traslación lleva un triángulo en el otro.

Si la razón de semejanza fuera distinta de 1, las rectas, que unen vértices homólogos, no son paralelas, ya que los lados homólogos son de distinta longitud. Si O es el punto de intersección de dos de estas rectas, hay una homotecia con centro en O que transforma un lado del triángulo *A* en el lado homólogo del triángulo *B*:



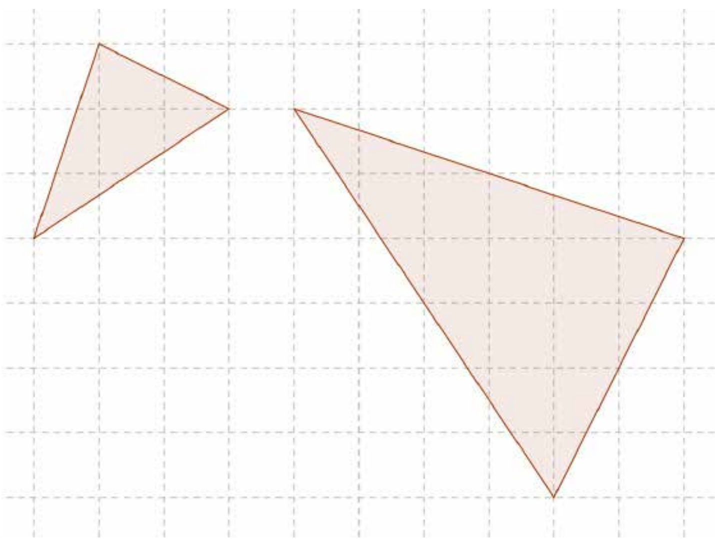
y en consecuencia transforma el triángulo *A* en un triángulo *C* cuyos lados son paralelos a los lados de *B* y comparte un lado con *B*, pero entonces *C* = *B*, es decir, la homotecia considerada transforma el triángulo *A* en el triángulo *B*. Como consecuencia de esto, las rectas que vértices homólogos concurren en el centro de las homotecias que llevan un triángulo en el otro.

Extendiendo el concepto de semejanza de triángulos, podemos decir que:

Dos figuras en el plano son semejantes si mediante sucesivas transformaciones geométricas, es posible transformar una de ellas en la otra.

Es entretenido ilustrar, usando un programa interactivo que incluya las transformaciones geométricas, que son semejantes: dos cuadrados, dos círculos, dos rectángulos con la misma relación entre sus lados, dos triángulos con la misma terna de ángulos.

Por ejemplo: Indicar las sucesivas trasformaciones geométricas que apliquen un triángulo en el otro, ambos con vértices en la cuadrícula.

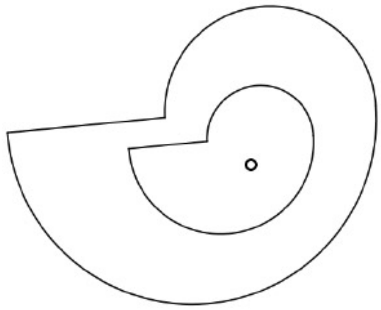


También se puede verificar, usando el programa, que se cumple el siguiente enunciado:

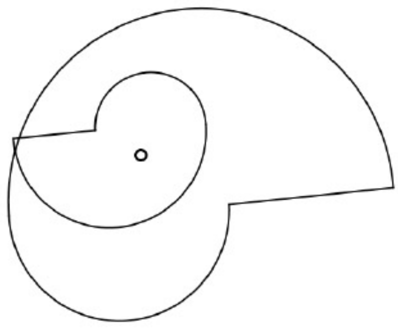
Una homotecia de razón r transforma una figura geométrica de área δ *en una figura de área* d^2.

Aquí usamos el término figura geométrica para referirnos a las figuras que son frecuentes en la literatura de la geometría del plano, tales como polígonos, círculos, coronas, etc.

En la siguiente figura se muestra el centro de la homotecia de razón *2* que transforma la figura más pequeña en la otra figura



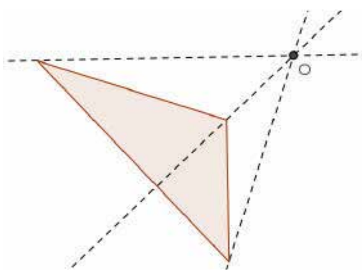
La figura a continuación, muestra el mismo centro de la homotecia pero de razón –2, que transforma la figura más pequeña en la otra figura.

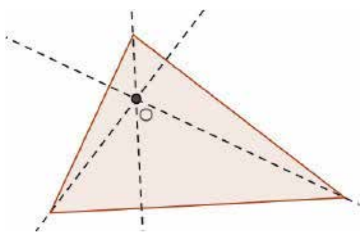


La figura original está formada por dos semicírculos, lo mismo ocurre con la figura transformada, sólo que los radios de los círculos tienen una longitud igual al doble de las longitudes de los radios originales. En consecuencia el área de la figura transformada es *4* veces el área de la figura original.

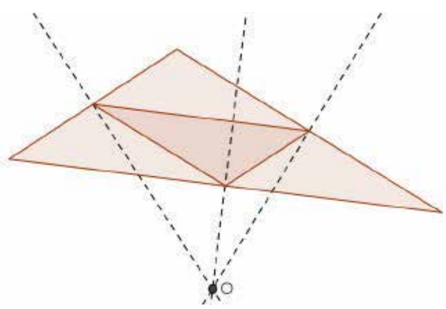
El ortocentro y el triángulo órtico

La alturas de un triángulo, o sus prolongaciones, concurren en un punto llamado el ortocentro.



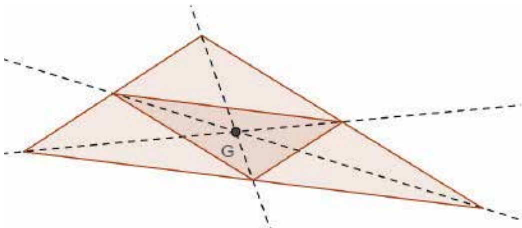


La validez de la afirmación precedente, puede establecerse si se tiene en cuenta que todo triángulo puede ser inscripto en un triángulo semejante al mismo, como el triángulo de los puntos medios de los lados. Esto se consigue trazando, por cada vértice del triángulo, una paralela al lado opuesto.

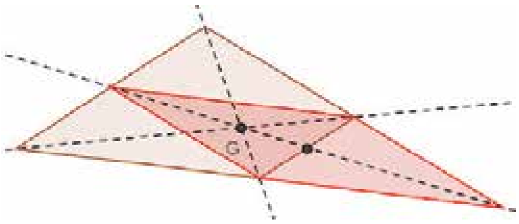


De esta manera, las rectas determinadas por las alturas del triángulo, pasan a ser las mediatrices de los lados del triángulo construido, es decir, el ortocentro del triángulo inicial sería el centro de la circunferencia que circunscribe al triángulo construido.

Por otra parte, como los triángulos son semejantes y los lados homólogos son paralelos, podemos obtener el centro *G* de la homotecia que los relaciona uniendo los pares de vértices homólogos:

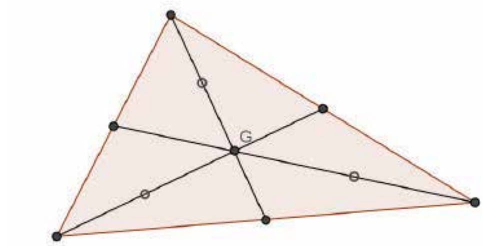


Esta es una homotecia de razón –2. Los segmentos de las líneas trazadas, cortan a los lados del triángulo inicial en los puntos medios, por ser las diagonales de los paralelogramos que se forman en la figura,

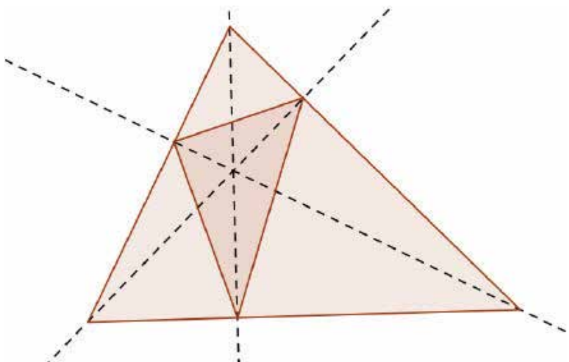


Los segmentos que unen los vértices de un triángulo con el punto medio del lado opuesto se llaman *medianas* del triángulo. Del análisis precedente, surge que:

Las medianas de un triángulo concurren en un punto G, llamado baricentro. El baricentro divide a cada mediana en la relación 2:1.



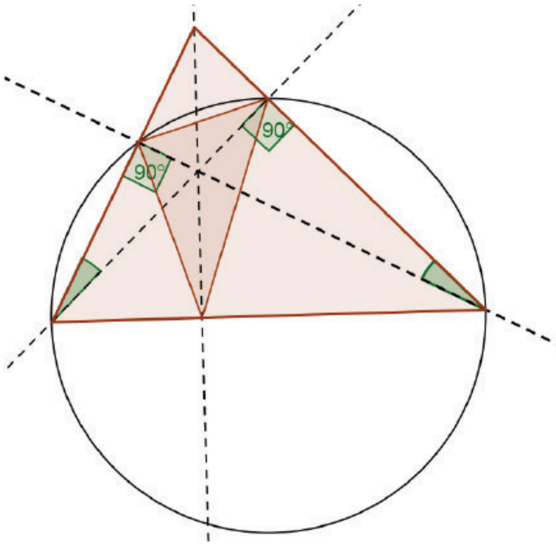
Otra observación que podemos hacer, está relacionada con los pies de las alturas. En un triángulo acutángulo los pies de las alturas son los vértices de un triángulo inscripto llamado *triángulo órtico*.



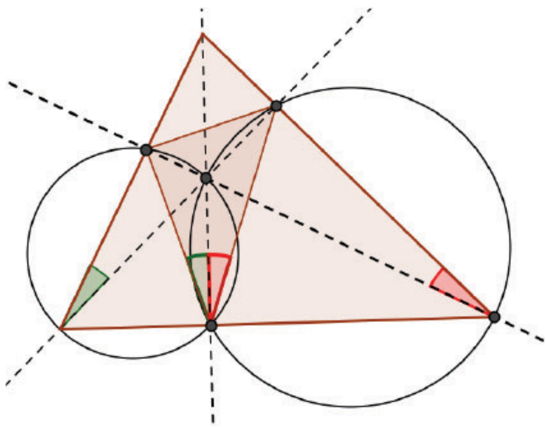
Podemos establecer la siguiente propiedad:

Las alturas de un triángulo acutángulo están sobre las bisectrices de su triángulo órtico.

Observando la siguiente figura y teniendo en cuenta el concepto de arco capaz,



concluimos que los vértices de un lado de triángulo y los pies de las alturas correspondientes a los otros dos lados, son cuatro puntos que están en la circunferencia que tiene por diámetro al lado. En consecuencia, los ángulos marcados en la figura precedente son iguales. Por otra parte, como muestra la figura siguiente, hay otros cuadriláteros con ángulos opuestos rectos cada uno de ellos formado por el ortocentro, un vértice y los pies de alturas correspondientes a los otros vértices. Como se ha observado, estos cuadriláteros son inscriptibles por tener un par de ángulos opuestos rectos.



Por el mismo concepto de arco capaz, los cuatro ángulos marcados en la figura anterior son iguales. Esto muestra que una altura del triángulo dado está sobre la bisectriz del triángulo órtico del ángulo con vértice en el pie de dicha altura.

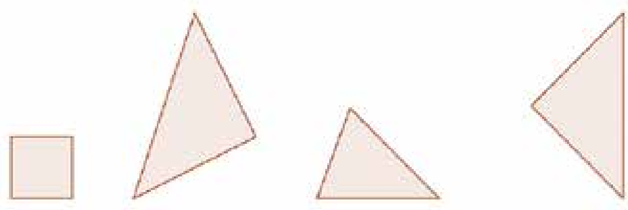
Razonando del mismo modo sobre los otros lados del triángulo, se establece la validez de la afirmación enunciada.

Comentario: Las transformaciones geométricas: traslaciones, rotaciones y simetrías tienen una propiedad común de conservar distancias entre puntos, es decir, si los puntos *A,B* se transforman en *A'* y *B'* respectivamente, entonces la distancia entre *A* y *B* es la misma que la distancia entre *A'* y *B'*. De esto hecho se deducen propiedades tales como: estas transformaciones conservan longitudes, ángulos, áreas, etc.

Problemas Propuestos

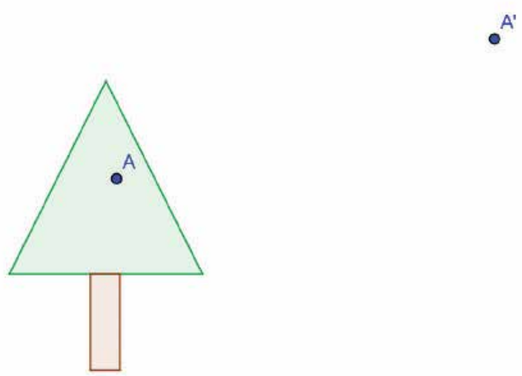
1. Para dibujar el trasladado de un cuadrilátero convexo según un vector dado, ¿Cuántos puntos trasladados se necesita conocer?, ¿Cuáles elegiría? Cómo resolvería el mismo problema si el cuadrilátero no es convexo.

2. Según la figura, ¿Es posible trasladar el cuadrado de modo que quede inscripto en alguno de los triángulos?



3. Un punto *P* se rota *180º* alrededor de un punto *A* y se obtiene el punto *Q*. Luego, *Q* se rota *180º* alrededor de *B* y se obtiene el punto *R* que dista a *20cm* de *P*. ¿cuál es la distancia entre *A* y *B*?

4. El árbol en la figura se rotó sucesivamente *180º* alrededor de un punto y luego de otro. Después de estas transformaciones el punto *A* del árbol quedó en el punto *A'*. Indicar cómo encontraría la posición del árbol después de las transformaciones.

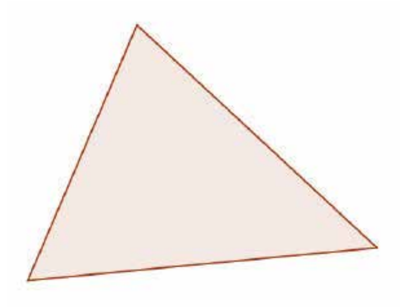


5. El árbol en la figura precedente, se rotó sucesivamente *30º* alrededor de un punto en sentido horario y luego *30º* alrededor de otro punto en sentido antihorario. Después de estas transformaciones el punto *A* del árbol quedó en el punto *A'*. Indicar cómo encontraría la posición del árbol después de las transformaciones.

6. Encontrar el centro de una rotación de *30º* que mueva el punto *A* en el punto *B*.

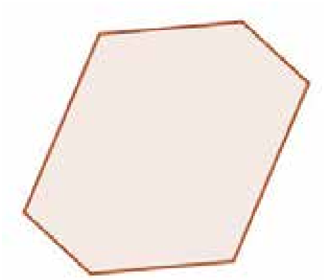
7. Dados dos segmentos paralelos de igual longitud, encontrar el centro de una rotación que mueva el segmento *AB* en el segmento *CD*. ¿De cuántos grados es la rotación?

8. Diremos que una figura tiene *centro* si después de rotarla *180º* alrededor de algún punto *C* se obtiene la misma figura; cuando este es el caso, el punto *C* se llama *centro de la figura*.

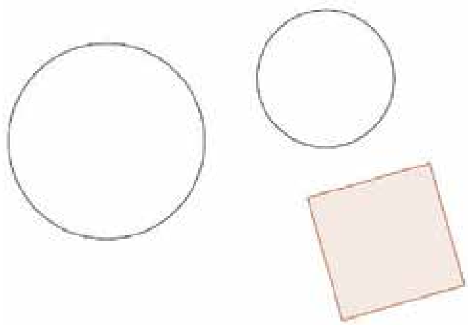


i) Indique cuáles de las siguientes figuras tienen centro: triángulo, paralelogramo, pentágono, circunferencia.
ii) ¿Un cuadrilátero convexo con centro es necesariamente un paralelogramo?
iii) Indicar cómo inscribir un hexágono con centro en el triángulo dado. (Dos vértices en cada lado)

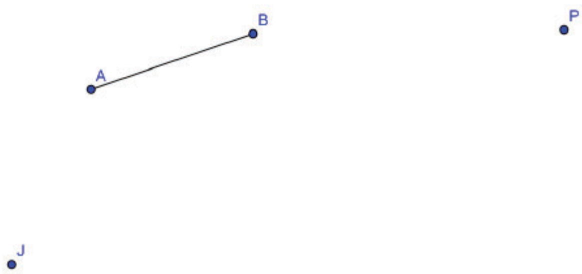
9. El hexágono de la figura tiene los pares de lados opuestos paralelos y de igual longitud. ¿Tiene centro? En caso afirmativo, indicar cómo encontrarlo y justificar.



10. Trasladar el cuadrado de modo que dos de sus vértices caigan sobre una de las circunferencia *C* y los dos restantes sobre la otra.



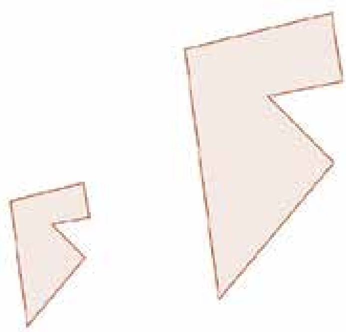
11. Juana y Pedro se encuentran sobre los puntos *P* y *J* de una habitación, Un espejo rectangular ocupa la zona indicada por el segmento *AB*:



i) Si Juana puede ver a Pedro en el espejo, ¿Pedro puede ver a Juana?
ii) ¿Puede ver Juana a Pedro?

12. Usando un programa interactivo de geometría, investigar la variación del perímetro de un triángulo inscripto en un triángulo acutángulo dado. Sugerencia: tenga en cuenta el *principio de la reflexión*.

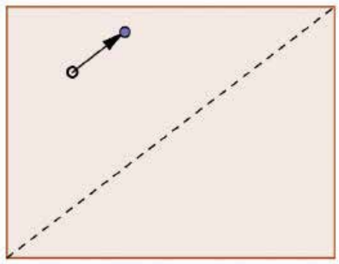
13. Una figura se obtuvo de la otra mediante una homotecia. Hallar el centro de una homotecia que transforme una figura en la otra:



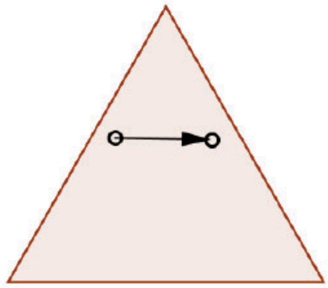
14. Construir un hexágono regular dada la diferencia entre su lado y su apotema.

15. Hallar un triángulo de modo que sus medianas estén sobre tres rectas concurrentes dadas. ¿Es único?

16. En una mesa rectangular de billar de 108 cm por 144 cm, una bola sale en una dirección paralela a una diagonal y se detiene si vuelve a pasar por el mismo punto.

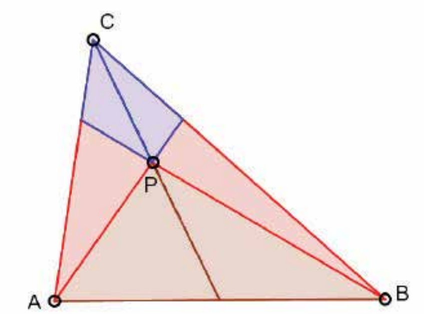


Decidir si la bola se detiene, y en tal caso cuánto centímetros recorre.

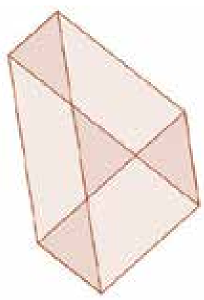


17. Análogo al problema 16, pero con una mesa con forma de triángulo equilátero de *180cm* de lado y la bola sale en una dirección paralela a un lado del triángulo.

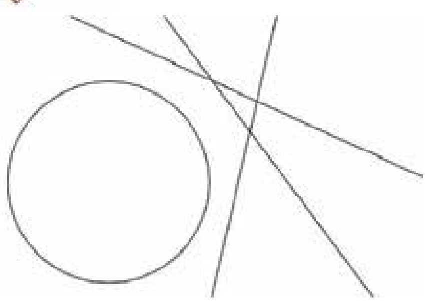
18. El punto *P* se encuentra sobre la mediana del triángulo *ABC* que parte desde el vértice *C*. Esta mediana junto con los segmentos que parten desde *A* y *B* pasando por *P*, descomponen al triángulo en 6 triángulos. Mostrar que los triángulos pintados con el mismo color tienen igual área.



19. Usando como lados las medianas de un triángulo de área 12 cm^2 se construye un triángulo. Hallar el área de este triángulo.



20. Un triángulo de $2cm^2$ de área, se rota 180° alrededor de cada uno de sus vértices para formar un hexágono como muestra la figura.
Hallar el área de este hexágono.



21. Dadas las tres rectas y la circunferencia de la figura, encontrar dos triángulos inscriptos en la circunferencia cuyos lados sean paralelos a las rectas.