OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA

OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CLAMI
UMA
FOMA

Torneo de Computación y Matemática

Abril de 2003

Problema 2, Primera Ronda CyM 2000, Nivel 1:

Una acaudalada anciana tiene gran cantidad de lingotes de oro de tres tipos: por valor de \$56, de \$106, y de \$127. ¿Cuál es la menor cantidad de lingotes que puede usar para depositar exactamente \$5409 en una caja de seguridad de un banco?

En papel

Primero vamos a escribir la ecuación en papel. Llamamos x a la cantidad de lingotes de \$56 que deposita la señora. Así que en lingotes chiquitos deposita $x \cdot 56$ pesos.

De la misma manera llamamos y a la cantidad de lingotes de \$106 y z a la cantidad de lingotes de \$127.

En total la anciana deposita en el banco $x \cdot 56 + y \cdot 106 + z \cdot 127$ pesos. El total que deposita es de 5409 así que queda para resolver $x \cdot 56 + y \cdot 106 + z \cdot 127 = 5409$.

Notamos que x no puede ser muy grande, porque si usara por ejemplo 1000 lingotes de \$56, el depósito sería demasiado grande. La máxima cantidad de lingotes pequeños que puede utilizar es 5409/56 = 96,589..., o sea que x está entre 0 y 96 (ambos extremos incluidos).

De la misma manera y está entre 0 y 51 porque 5409/106 = 51,028... y z está entre 0 y 42 porque 5409/127 = 42,590... . Así que hay que probar sólo $97 \cdot 52 \cdot 43 \cong 200000$ posibilidades, que para la computadora son pocas.

Vamos a escribir un programa que encuentra todas las combinaciones de x, y y z que cumplen la ecuación y después vamos a elegir a mano la que utiliza menos lingotes.

El programa en QB

```
Dim X as Long
Dim Y as Long
Dim Z as Long
Print " X", " Y", " Z", " Total"
For X = 0 To 97
  For Y = 0 To 51
    For Z = 0 To 42
      If X*56+Y*106+Z*127=5409 Then
        Print X, Y, Z, X + Y + Z
      End If
    Next Z
  Next Y
Next X
```

En la pantalla

(No hace falta copiarlo en papel.)

X	Y	Z	Total
2	32	15	49
5	40	7	52
7	**3**	**37**	**47**
10	11	29	50
13	19	21	53
16	27	13	56
19	35	5	59
24	6	27	57
27	14	19	60
30	22	11	63
33	30	3	66
38	1	25	64
41	9	17	67
44	17	9	70
47	25	1	73
55	4	15	74
58	12	7	77
72	7	5	84
86	2	3	91

En papel nuevamente

(Es importante escribirlo en papel.)

El programa muestra en cada caso el total de lingotes para poder buscar más fácilmente el menor a ojo.

Mirando la pantalla buscamos la combinación con la menor cantidad de lingotes que puede usar la señora: 7 lingotes de \$56, 3 lingotes de \$106 y 37 lingotes de \$127.

Comentarios al margen

También se puede hacer que la computadora elija automáticamente la combinación con menos lingotes.

Otra posibilidad es usar dos ciclos for para elegir x e y. En cada caso despejar z y fijarse si es un número entero. Esto anda un poco más rápido por que no prueba con todos los valores de z, uno por uno.

Recuerden escribir la respuesta del problema en papel (con letra prolija).

Problema 1, Primera Ronda CyM 1999, Nivel 1:

¿Cuántos números enteros positivos menores que 1020 tienen como únicos factores primos al 2, 3 ó 7? (Por ejemplo: 2, 8, 21, 63, 84, ...)

(Nota: los números enteros positivos son 1, 2, 3, 4, ...)

En borrador

Primero tratamos de entender a fondo el problema. Llamemos n a un número que cumpla con lo que pide el enunciado. Entonces, como es "entero positivo", debe ser $n \geq 1$. También el enunciado dice que $n < 1020$.

La condición que falta es que n tiene como únicos factores primos al 2, al 3 y/o al 7. Pruebo con los ejemplos del enunciado:

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$

$21 = 3 \cdot 7$

$63 = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 7$

Y también con otros números:

17 = ... = 17 (es primo, no sirve)

$35 = 5 \cdot 7$ (tiene el 5, no sirve)

$6 = 2 \cdot 3$ (¡este sí!)

O sea, si escribo n como producto de sus factores primos, debe ser $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$.

(A continuación describimos una solución posible. No es la más eficiente, pero funciona, y quizás sea lo primero que se nos ocurre.)

En papel

El enunciado pide contar cuántos enteros n cumplen $n \geq 1$, $n < 1020$, y $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$.

Como el 1 no sirve, lo descartamos.

Lo que vamos a hacer es un programa que prueba todos los números enteros desde 2 hasta 1019, y los cuente cuando el número sólo tiene como factores primos al 2, 3 ó 7.

Primero hacemos una copia del valor del Numero en la variable Queda.

Vamos a eliminar todos los 2 de la factorización de Queda. Si tiene de factor al 2 al dividirlo por 2 da resto 0, calculamos el resto con la función "mod". Si es así la dividimos por 2. Repitiendo este proceso muchas veces estamos seguros de eliminar a todos los 2. Como los números son menores a 1020 alcanza con repetir este procedimiento 1020 veces.

(Se puede achicar mucho este número, pero no hace falta, porque el programa es rápido. Para cada número el programa tiene que hacer unas 1020 cuentas tres veces (para 2, 3 y 7). Como hay 1018 numero tiene que hacer sólo unas $1020 * 3 * 1018 \cong 3000000$ operaciones.)

Luego hacemos lo mismo con 3 y con 7.

Si al final Queda vale 1, significa que no aparecen otros primos en la factorización de n y entonces es de la forma $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$ y lo contamos. Si no, quiere decir que todavía quedan otros factores primos, y no lo contamos.

El programa en QB

```
Dim Cantidad as Long
Dim Numero as Long
Dim Queda as Long
Dim Aux as Long
Cantidad = 0
For Numero = 2 To 1019
    Queda = Numero
    For Aux = 1 To 1020
        If Queda mod 2 = 0 Then
            Queda = Queda / 2
        End If
    Next Aux
    For Aux = 1 To 1020
        If Queda mod 3 = 0 Then
            Queda = Queda / 3
        End If
    Next Aux
    For Aux = 1 To 1020
        If Queda mod 7 = 0 Then
            Queda = Queda / 7
        End If
    Next Aux
    If Queda = 1 Then
        Cantidad = Cantidad + 1
    End If
Next Numero
Print "El resultado es:", Cantidad
```

En la pantalla

```
El resultado es: 74
```

En papel nuevamente

(Es importante escribirlo en papel.)

El programa muestra directamente el resultado: hay 74 enteros positivos menores que 1020 cuyos únicos factores primos son 2, 3 ó 7.

Comentarios al margen

A veces es conveniente ir mostrando los números que va encontrando, para estar seguros de haber hecho bien las cosas.

Hay varias formas distintas de resolver y de escribir un programa que realice esta tarea. Por ejemplo se puede hacer que cuando se da cuenta que no es múltiplo de 2, no siga probando inútilmente.

Otra posibilidad, en lugar de probar número por número si sirve o no, es simplemente generarlos (con cuidado). Para esto usamos que $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$, y mediante ciclos anidados vamos dando valores a a, b y c, verificando que el producto (n) sea menor que 1020. Notar que a, b y c no pueden ser muy grandes. Con este método anda más rápido.

Recuerden escribir la respuesta del problema en papel (con letra prolija).