

TORNEO DE PRIMAVERA 2012

CUENCA DEL PLATA PRIMER NIVEL

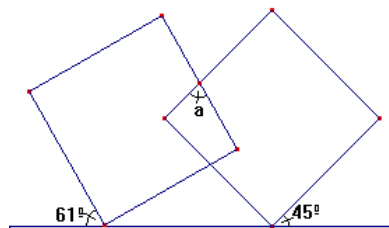
Primera Prueba

Lee con atención:

- 1- Es posible consultar libros o apuntes y usar calculadora.
- 2- Solamente se pueden usar los elementos propios.
- 3- Durante la prueba no está permitido usar celulares ni computadoras.
- 4- Escribe con la respuesta los cálculos y lo que pensaste para resolver el problema.
- 5- No se responderán preguntas sobre los enunciados de los problemas. La interpretación debe hacerla cada participante.

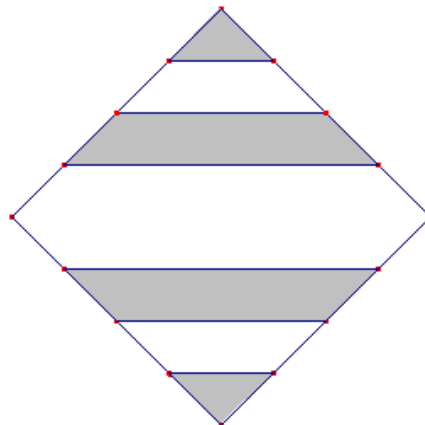
PROBLEMAS

- 1- Hallar el valor del ángulo a indicado en la figura, formada por dos cuadrados.



- 2- Sea ABC un triángulo equilátero de perímetro 12 cm y P cualquier punto en el interior del lado BC. Por P se trazan paralelas a los lados AB y AC, que interceptan a AC y AB en Q y R respectivamente. Calcular el perímetro del paralelogramo ARPQ.

- 3- Cada lado del cuadrado de la figura se ha dividido en 4 partes iguales de longitud 1. Para pintar la región sombreada se usaron 3 litros de pintura azul ¿Cuántos litros de pintura roja será necesaria para pintar todo el cuadrado?



TORNEO DE PRIMAVERA 2012

CUENCA DEL PLATA SEGUNDO NIVEL

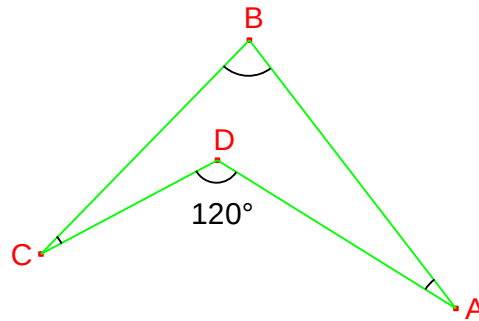
Primera Prueba

Lee con atención:

- 1- Es posible consultar libros o apuntes y usar calculadora.
- 2- Solamente se pueden usar los elementos propios.
- 3- Durante la prueba no está permitido usar celulares ni computadoras.
- 4- Escribe con la respuesta los cálculos y lo que pensaste para resolver el problema.
- 5- No se responderán preguntas sobre los enunciados de los problemas. La interpretación debe hacerla cada participante.

PROBLEMAS

- 1- Calcular la suma de los ángulos A, B y C marcados en la figura, sabiendo que el ángulo marcado en D mide 120° .



- 2- Con cerámicos rectangulares de $4\text{cm} \times 10\text{cm}$ se desea formar un cuadrado, sin huecos ni superposiciones. ¿Cuál es la menor cantidad de cerámicos que se necesita para formar el cuadrado?
- 3- Desde un punto en el interior de un rectángulo las distancias a tres de los vértices del rectángulo son 2cm , 2cm y 3cm . Hallar la distancia del punto al vértice restante.

TORNEO DE PRIMAVERA 2012

CUENCA DEL PLATA TERCER NIVEL

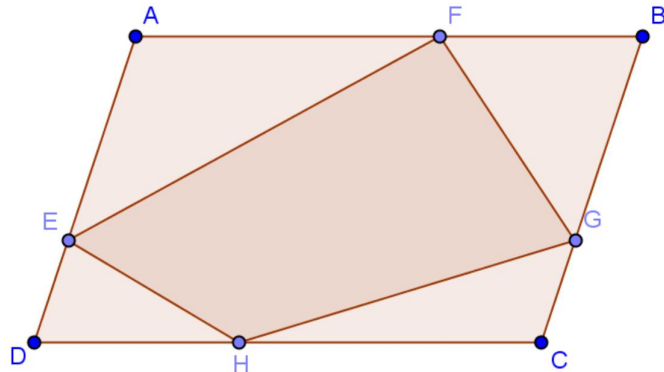
Primera Prueba

Lee con atención:

- 1- Es posible consultar libros o apuntes y usar calculadora.
- 2- Solamente se pueden usar los elementos propios.
- 3- Durante la prueba no está permitido usar celulares ni computadoras.
- 4- Escribe con la respuesta los cálculos y lo que pensaste para resolver el problema.
- 5- No se responderán preguntas sobre los enunciados de los problemas. La interpretación debe hacerla cada participante.

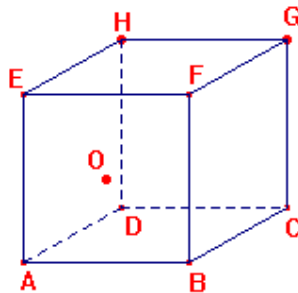
PROBLEMAS

- 1- Hallar el área del cuadrilátero EFGH inscripto en el paralelogramo ABCD de 10 cm^2 de área, sabiendo que el segmento EG es paralelo a AB.



- 2- Pedro tiene baldosas cuadradas para hacer un piso cuadrado usando todas. Pero observa que le sobran 7 ó le faltan 10. ¿Cuántas baldosas tiene Pedro?

- 3- Dado el cubo ABCDEFGH de arista 2, O es el centro del cuadrado ABFE. Una hormiga camina de H hasta O y de O hasta G, caminando solamente por dos caras. ¿Cuánto mide el recorrido más corto?



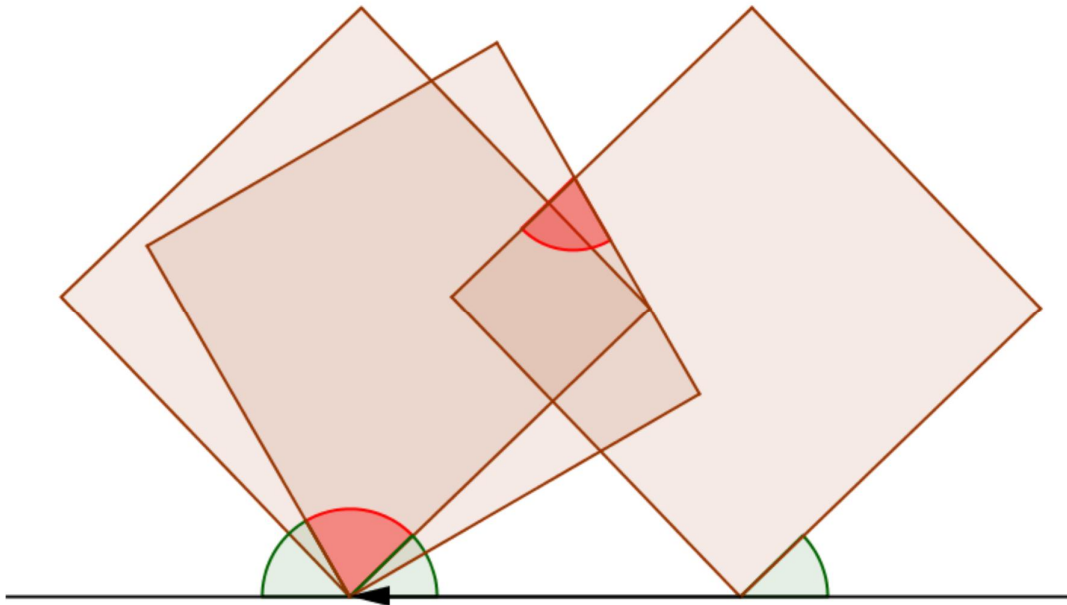
SOLUCIONES

PRIMER NIVEL

Problema 1- Dado que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° , en el triángulo de la figura el opuesto a la base mide 106° , ya que los de la base son 29° y 45° . En el cuadrilátero donde está el ángulo **a**, siendo la medida de los otros ángulos 90° , 106° y 90° , resulta **a** = 74° , dado que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero mide 360° .

Una visualización simple, siempre muy interesante en los problemas geométricos, que corrobora lo dicho es la siguiente:

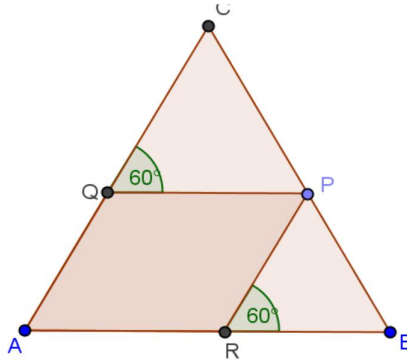
Si desplazamos el cuadrado de la derecha hasta hacer coincidir los vértices sobre la recta que los sustentan como se ve en la figura, se observa que los ángulos sombreados son iguales, pues los lados que los forman son correspondientemente paralelos.



Por lo tanto el ángulo buscado es $180^\circ - 61^\circ - 45^\circ = 74^\circ$.

ñ Mirar y Ver ñ como repetía el Dr. Miguel de Guzmán, que tantas veces nos honró con su presencia en los Seminarios de OMA.

Problema 2-

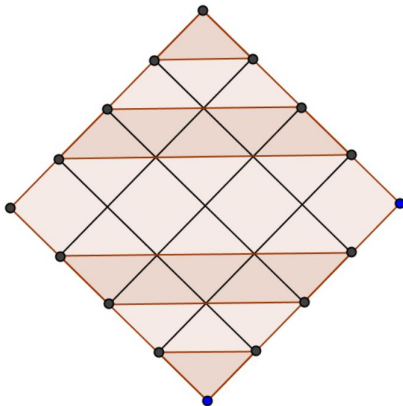


El triángulo ABC es equilátero, por lo tanto los ángulos en los vértices A, B y C miden 60° . Como QP es paralelo a AR, el ángulo marcado en Q mide 60° . Del mismo modo, como RP es paralelo a AQ, el ángulo marcado en R también mide 60° .

En cada uno de los triángulos RBP y QPC, dos de sus ángulos miden 60° , luego son triángulos equiláteros. El perímetro del paralelogramo ARPQ puede calcularse como:

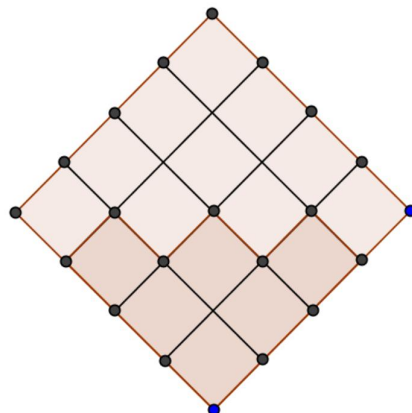
$$2(RP + PQ) = 2(BP + PC)$$

Como $BP + PC$ es el valor del lado del triángulo, que es 4cm, pues el perímetro es 12 cm, resulta que el perímetro del paralelogramo ARPQ es 8cm.



Problema 3 - Trazando paralelas a los lados del cuadrado por los puntos determinados al dividir cada lado en 4 partes iguales, el cuadrado resulta disecado en 16 cuadraditos ó 32 triángulos rectángulos, mitades de dichos cuadraditos.

Si se cortaran y reordenaran estas piezas, puede formarse la figura, donde se advierte que las piezas de las franjas sombreadas se disponen en 6 de los cuadraditos, y dado que fueron pintadas con 3 litros de pintura, cada litro de pintura cubre 2 cuadraditos. Luego, son necesarios 8 litros de pintura para cubrir los 16 cuadraditos que forman el cuadrado original.



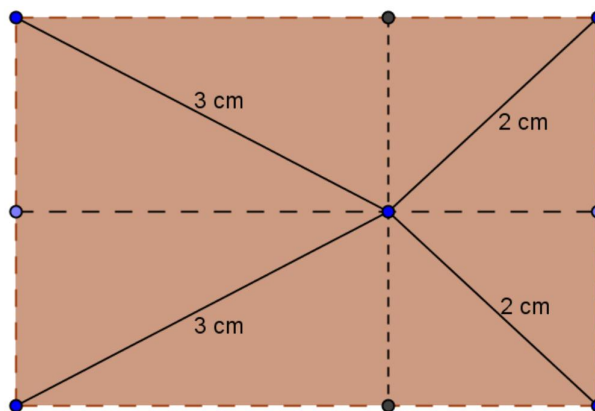
SEGUNDO NIVEL

Problema 1- Si se divide la flecha en dos triángulos trazando la diagonal interior DB, se obtiene que la suma de los triángulos interiores de la flecha es $2 \times 180^\circ = 360^\circ$. Luego como el triángulo interior en D mide $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$, resulta la suma de los ángulos $A + B + C = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$.

Problema 2- El área de un cuadrado formado con estos cerámicos es igual al área de un cerámico multiplicada por el número de cerámicos. Como el lado del cuadrado se forma con lados de los cerámicos, algunos de 4 cm y otros de 10 cm, su área es una cantidad entera de centímetros cuadrados. Así, el área es por una parte un múltiplo de 40 y por otra es un cuadrado perfecto. Buscando entre éstos el primero que sea múltiplo de 40, encontramos que es $400 = 20 \times 20 = 40 \times 10$. Luego el mínimo número de cerámicos necesarios para armar un cuadrado es 10.

Para facilitar la búsqueda, podemos expresar $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$ y el menor múltiplo de 40 que es un cuadrado perfecto se obtiene multiplicando este número por 2 y por 5, para obtener $40 \times 10 = 4^2 \times 5^2$.

Problema 3- Trazando paralelas a los lados del rectángulo por el punto interior, se forman 4 rectángulos; dos de ellos comparten un lado y sus diagonales miden 2cm, es decir son iguales. Los otros dos comparten un lado entre sí y otro lado con los rectángulos iguales, de manera que éstos también son iguales y sus diagonales miden 3cm, que es la distancia pedida del punto al cuarto vértice.



TERCER NIVEL

Problema 1- Los triángulos EFG y EBG tienen la misma base EG e igual altura, pues EG y AB son paralelas; luego tienen igual área. De modo que

$$\text{área EFGH} = \text{área EFG} + \text{área EGH} = \text{área EBG} + \text{área EGH}$$

Por las mismas razones, área EGH = EGC. Luego.

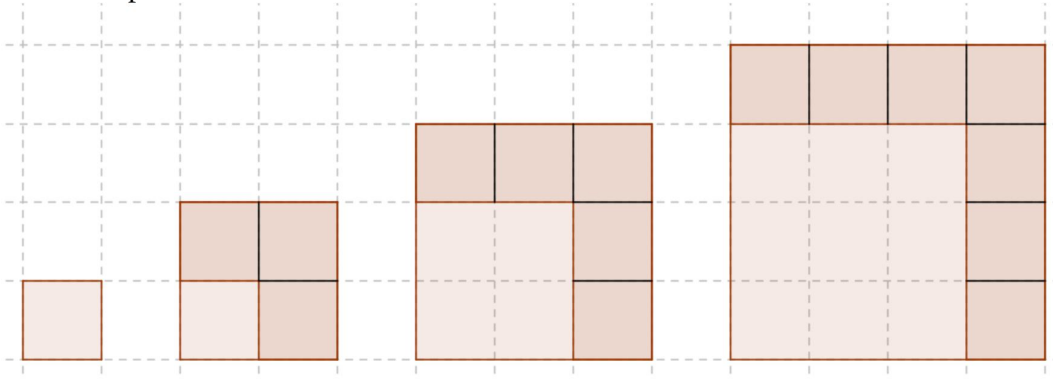
$$\text{área EFGH} = \text{área EBC}$$

Finalmente, por el mismo principio:

$$\text{área EBC} = \text{área DBC} \text{ y como BD es diagonal de ABCD, resulta}$$

$$\text{área EFGH} = \text{área DBC} = 5\text{cm}^2$$

Problema 2- Para pasar de un piso cuadrado al inmediato superior, son necesarios un número impar de baldosas



Por ejemplo, para pasar del 1x1 al 2x2 son necesarias 3 baldosas, para pasar del 2x2 al 3x3 son necesarias 5 baldosas, etc. Los sucesivos cuadrados pueden ser expresados como:

$$1 = 1$$

$$2^2 = 1 + 3$$

$$3^2 = 1 + 3 + 5$$

$$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$$

$$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

Como a Pedro le sobran 7 ó le faltan 10, hay 17 baldosas entre el cuadrado que Pedro puede hacer, donde le sobran 7 y el cuadrado que Pedro no puede hacer porque le faltan 10. Estos cuadrados serán:

$$8^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$$

$$9^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$$

De donde resulta que Pedro tiene 71 baldosas, dado que $64 + 7 = 81$ y $10 = 71$.

También podemos pensar el problema como sigue: llamamos x al número de Baldosas que tiene Pedro y t^2 el número de baldosas que necesita para formar el cuadrado para el que le sobran 7, de modo que $x = t^2 + 7$. Para el otro cuadrado precisa y^2 baldosas y le faltan 10, de modo que $x = y^2 - 10$. Debemos resolver el sistema:

$$\begin{aligned} x - 7 &= t^2 \\ x + 10 &= y^2 \end{aligned}$$

Y para ello restando de la segunda ecuación la primera, miembro a miembro, se tiene:

$$17 = t^2 - y^2 = (t - y) \cdot (t + y)$$

Como los únicos divisores de 17 son 1 y 17, resulta el sistema:

$$t - y = 1$$

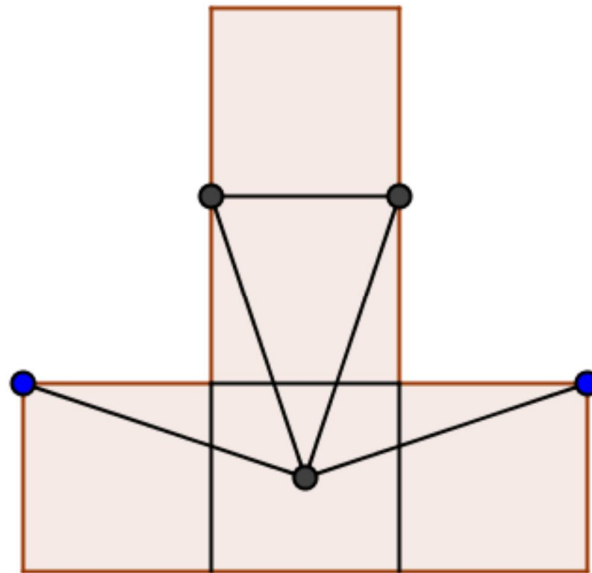
$$t + y = 17$$

de donde sumando miembro a miembro ambas ecuaciones, resulta $2t = 18$ es decir

$$t = 8, y = 9 \text{ y por consiguiente, } x = 64 + 7 = 71 = 81 - 10$$

Pedro tiene 71 baldosas.

Problema 3- Si desarrollamos el cubo mostrando sólo las caras que contienen los 3 puntos H, G y O, se pueden tomar los caminos recorridos por segmentos, para obtener el camino más corto, como se muestra en la figura.



Como las aristas del cubo miden 2, estos segmentos son hipotenusas de triángulos rectángulos cuyos catetos miden 3 y 1 (pues O es el centro del cuadrado ABFE), es decir los segmentos miden $\sqrt{10}$ y en consecuencia el menor recorrido será $2\sqrt{10}$.

De los cuatro recorridos posibles de longitud $\sqrt{10}$, hay un único que camina sólo por 2 caras, como pide el problema