Buenos Aires 5 de octubre de 2022

Estimado Alumno

Convocamos a los alumnos destacados en el Certamen Nacional de la O.M.A. de 2021 y sean alumnos regulares de Enseñanza Secundaria en 2022, a participar en la Cuarta IGO (Olimpiada Iraní de Geometría).

La prueba tendrá lugar el viernes 14 de octubre a las 13:00 horas en las ciudades de:

- Rosario (Lugar a confirmar - Rosario - Santa Fe)
- Ciudad de Buenos Aires - (Ciudad Universitaria - Aula a confirmar)

Hay tres niveles:

Elemental para alumnos de 7º y 8º grados (contando desde 1º de primaria).

Medio para alumnos de 9º y 10º grados.

Avanzado para alumnos de 11º y 12º grados.

La prueba del nivel elemental dura 3 horas y media y la de los otros dos niveles 4 horas y media.

Son 5 problemas y no se puede consultar libros ni usar calculadora.

Se seleccionarán, en total, las pruebas de 4 alumnos de cada nivel, y esos serán los representantes argentinos en esta competencia.

No te olvides de inscribirte en el link https://forms.gle/jYsuxVfpvysF1nmU7

Acompañan a esta convocatoria las pruebas de los años 2015, 2016, 2017 y 2020 que pueden servir de entrenamiento.

El día de la competencia debes presentar el formulario de autorización que podrás bajar de nuestra web: www.oma.org.ar, firmado por tus padres y con el sello del colegio.

Te esperamos el viernes 14 de octubre. Cordialmente.

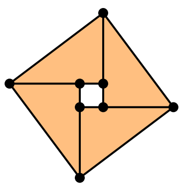
Patricia Fauring
Comité Olímpico

Flora Gutierrez
Comité Olímpico

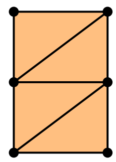
Problemas de la segunda olimpiada iraní de geometría

Nivel Elemental: alumnos de 7º y 8º grados

1. Se tienen cuatro triángulos iguales de madera de lados 3, 4 y 5 centímetros. ¿Cuántos polígonos convexos se pueden formar usando todos estos triángulos? (Dibujar los polígonos sin hacer demostraciones.)
Un polígono convexo es un polígono con todos sus ángulos menores que 180º y que no tiene huecos. Por ejemplo:



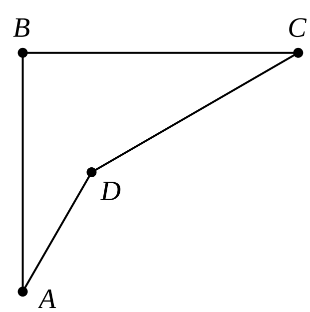
Este polígono no es convexo



Este polígono es convexo

2. Sea *ABC* un triángulo con $A = 60^{\circ}$. Los puntos *M*, *N*, *K* están en *BC*, *AC*, *AB* respectivamente, de modo que $BK = KM = MN = NC$. Si $AN = 2AK$, hallar los valores de B y C.

3. En la figura que se muestra a continuación sabemos que $AB = CD$, $BC = 2AD$, $BCD = 30^{\circ}$ y $ABC = 90^{\circ}$. Demostrar que $BAD = 30^{\circ}$.



4. En un rectángulo *ABCD*, los puntos *M*, *N*, *P*, *Q* están en *AB*, *BC*, *CD*, *DA* respectivamente de modo que las áreas de los triángulos *AQM*, *BMN*, *CNP*, *DPQ* son iguales. Demostrar que el cuadrilátero *MNPQ* es un paralelogramo.

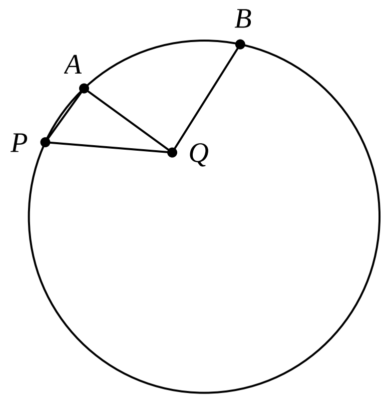
5. Determinar si existen 6 circunferencias del plano tales que cada circunferencia pasa por los centros de exactamente 3 de las otras circunferencias.

Tiempo: 3 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos

Problemas de la segunda olimpiada iraní de geometría

Nivel Medio: alumnos de 9º y 10º grados

1. En la figura, los puntos *P*, *A*, *B* están en una circunferencia. El punto *Q* está en el interior de la circunferencia de modo que $PAQ = 90^{\circ}$ y $PQ = BQ$. Demostrar que el valor de $AQB - PQA$ es igual al arco AB (o sea, igual al ángulo AOB, donde *O* es el centro de la circunferencia).



2. En el triángulo acutángulo *ABC*, *BH* es la altura desde el vértice *B*. Los puntos *D* y *E* son puntos medios de *AB* y *AC* respectivamente. Supongamos que *F* es el simétrico de *H* con respecto a *ED*. Demostrar que la recta *BF* pasa por el circuncentro del triángulo *ABC*.

3. En el triángulo *ABC* los puntos *M*, *N*, *K* son puntos medios de *BC*, *CA*, *AB* respectivamente. Sean ω_B y ω_C dos semicircunferencias de diámetros *AC* y *AB* respectivamente, exteriores al triángulo. Supongamos que *MK* y *MN* cortan a ω_C y ω_B en *X* e *Y* respectivamente. Si las tangentes trazadas por *X* e *Y* a ω_C y ω_B respectivamente se cortan en *Z*, demostrar que $AZ \perp BC$.

4. Sea *ABC* un triángulo equilátero cuya circunferencia circunscrita es ω y cuyo circuncentro es *O*. Sea *P* un punto del arco BC. La tangente a ω trazada por *P* corta las prolongaciones de *AB* y *AC* en *K* y *L* respectivamente. Demostrar que $KOL > 90^{\circ}$.

5. a) Determinar si existen 5 circunferencias en el plano tales que cada circunferencia pasa por los centros de exactamente 3 de las otras circunferencias.
b) Determinar si existen 6 circunferencias en el plano tales que cada circunferencia pasa por los centros de exactamente 3 de las otras circunferencias.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos

Problemas de la segunda olimpiada iraní de geometría

Nivel Avanzado: alumnos de 11º y 12º grados

1. Dos circunferencias ω_1 y ω_2 (de centros O_1 y O_2 respectivamente) se cortan en *A* y *B*. El punto *X* pertenece a ω_2. Sea *Y* un punto de ω_1 tal que $XBY = 90^o$. Sea *X'* el segundo punto de intersección de la recta O_1X y ω_2, y sea *K* el segundo punto de intersección de *X'Y* y ω_2. Demostrar que *X* es el punto medio del arco AK.

2. Sea *ABC* un triángulo equilátero cuya circunferencia circunscrita es ω y cuyo circuncentro es *O*. Sea *P* un punto del arco BC. La tangente a ω trazada por *P* corta las prolongaciones de *AB* y *AC* en *K* y *L* respectivamente. Demostrar que $KOL > 90^o$.

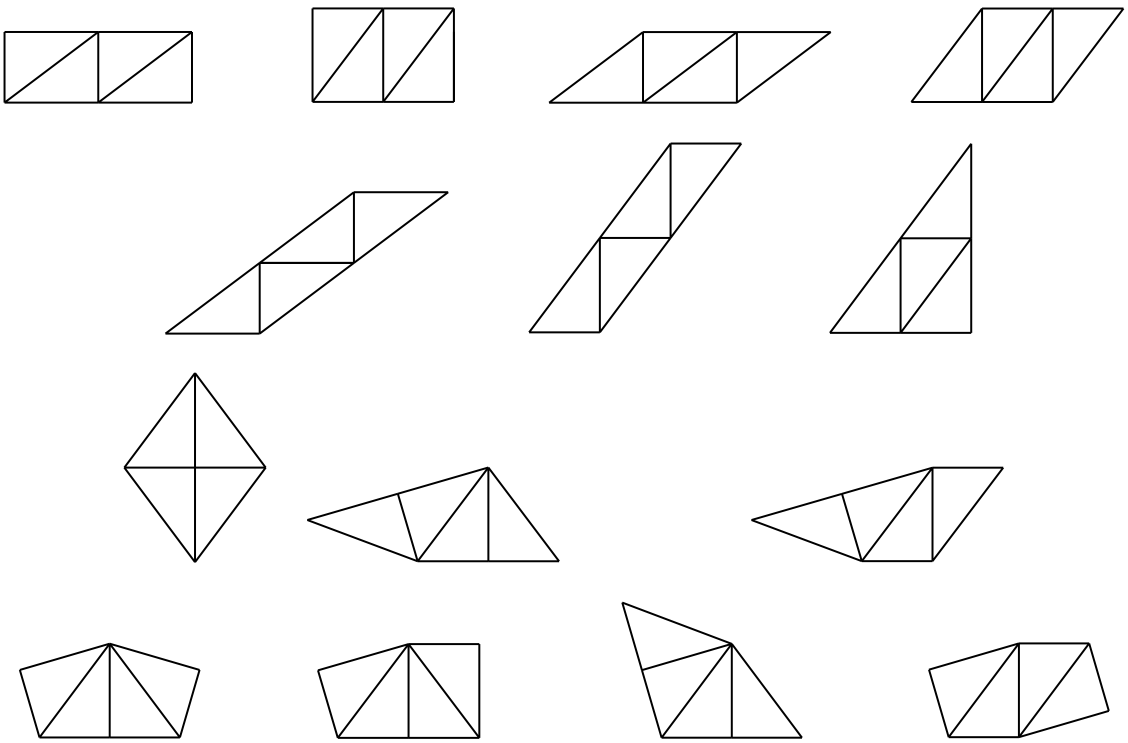
3. Sea *H* el ortocentro del triángulo *ABC*. Sean l_1 y l_2 dos rectas que pasan por *H* perpendiculares entre sí. La recta l_1 corta a *BC* y a la prolongación de *AB* en *D* y *Z* respectivamente, y la recta l_2 corta a *BC* y a la prolongación de *AC* en *E* y *X* respectivamente. Sea *Y* un punto tal que $YD \parallel AC$ y $YE \parallel AB$. Demostrar que *X*, *Y*, *Z* están alineados.

4. En el triángulo *ABC* dibujamos la circunferencia de centro *A* y radio *AB*. Esta circunferencia corta a *AC* en dos puntos. También dibujamos la circunferencia de centro *A* y radio *AC* y esta circunferencia corta a *AB* en dos puntos. Denotamos a estos cuatro puntos A_1, A_2, A_3, A_4. Los puntos B_1, B_2, B_3, B_4 y C_1, C_2, C_3, C_4 se definen de manera similar. Supongamos que estos 12 puntos están en dos circunferencias. Demostrar que el triángulo *ABC* es isósceles.

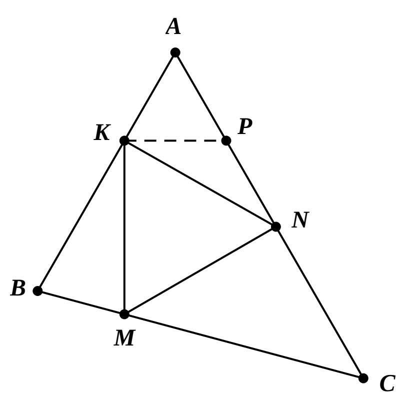
5. Los rectángulos ABA_1B_2, BCB_1C_2, CAC_1A_2 son exteriores al triángulo *ABC*. Sea *C'* un punto tal que $C'A_1 \perp A_1C_2$ y $C'B_2 \perp B_2C_1$. De manera similar se definen los puntos *A'* y *B'*. Demostrar que las rectas *AA'*, *BB'*, *CC'* son concurrentes.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos

Soluciones Segunda IGO (2015)
Nivel Elemental
Problema 1.

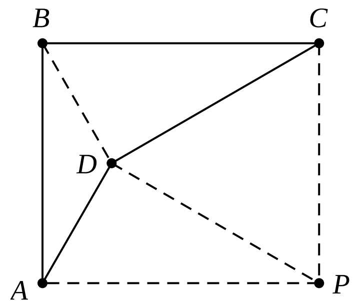


Problema 2.
Supongamos que P es el punto medio de AN. Entonces $AK = AP = AN$ y podemos afirmar que el triángulo APK es equilátero. Luego $ANK = \frac{KPA}{2} = 30^{\circ}$. Sea $ACB = NMC = \alpha$. Entonces $ABC = KMB = 120^{\circ} - \alpha$. De modo que $KMN = 60^{\circ}$. Luego el triángulo KMN es equilátero. Ahora sabemos que $MNA = 90^{\circ}$. Entonces $\alpha = 45^{\circ}$. De modo que $C = 45^{\circ}$ y $B = 75^{\circ}$.



Problema 3.
Sea P tal que el triángulo DCP es equilátero. Sabemos que $PC \perp BC$ y $PC = CD = AB$, luego el cuadrilátero $ABCP$ es un rectángulo, luego $APD = APC - DPC = 90^{\circ} - 60^{\circ} = 30^{\circ}$.
Por otro lado, $DP = DC$ y $AP = BC$. De modo que los triángulos ADP y BDC son congruentes. Entonces $AD = BD$.

Sea H en CD tal que $BH \perp CD$,
luego $BH = \dfrac{BC}{2} = BD$, de
manera que podemos afirmar que
D y H coinciden y $BDC = 90^{o}$.
Luego $ABD = BAD = 30^{o}$.



Problema 4.
Sean $AB = CD = a$, $AD = BC = b$ y $AM = x$, $AQ = z$, $PC = y$, $NC = t$. Si $x \neq y$ podemos suponer que $x > y$. Sabemos que

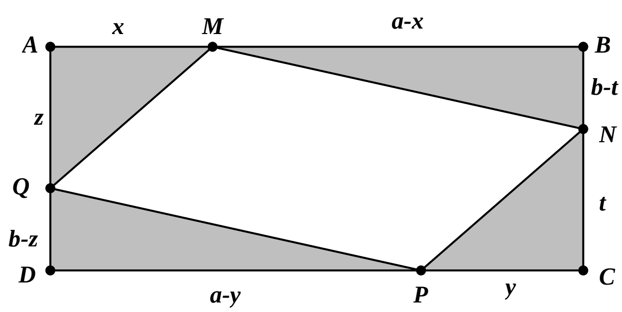
$$y < x \Rightarrow a - x < a - y \qquad (1)$$

$$S_{AQM} = S_{CNP} \Rightarrow zx = yt \Rightarrow z < t \Rightarrow b - t < b - z. \qquad (2)$$

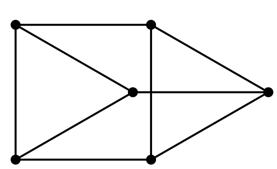
De acuerdo con las desigualdades (1) y (2):

$$(a - x)(b - t) < (a - y)(b - z) \Rightarrow S_{BMN} < S_{DPQ}$$

que es una contradicción. Luego $x = y$, de modo que $z = t$. Podemos afirmar que los triángulos AMQ y CPN son congruentes. Luego $MQ = NP$ y de modo similar $MN = PQ$. Luego el cuadrilátero $MNPQ$ es un paralelogramo.
Nota. Si el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo, de modo similar podemos demostrar que el cuadrilátero $MNPQ$ es un paralelogramo.



Problema 5.
En la figura tenemos 6 puntos del plano tales que para todo punto hay exactamente 3 de los otros en una circunferencia de radio 1.

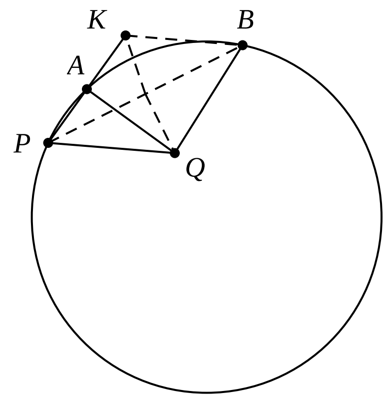


Nivel Medio
Problema 1.
Sea K el simétrico de P con respecto a AQ. Tenemos que demostrar que $2APB = AQB - AQP$.

Sabemos que AQ es la mediatriz de PK. De modo que $AQP = AQK$ y $PQ = KQ = BQ$, luego Q es el circuncentro del triángulo PKB. Sabemos que

$$2APB = KQB = AQB - AQK = AQB - AQP\,.$$

Entonces al restar AQB de PQA obtenemos el arco AB.



Problema 2.

Sea O el circuncentro del triángulo ABC. Sabemos que el cuadrilátero $ADOE$ es cíclico. Además sabemos que $AD = HD = DB$, luego

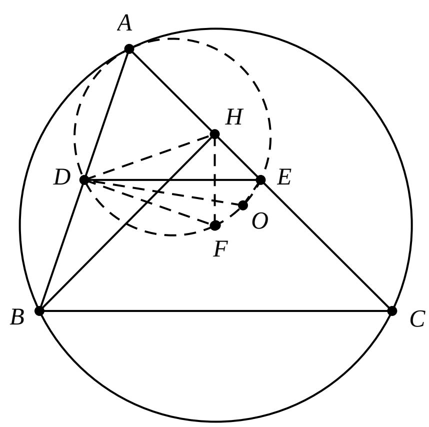
$$A = DHA = 180^{\circ} - DHE = 180^{\circ} - DFE$$

De modo que $ADFE$ es cíclico.

Así podemos afirmar que $ADFOE$ es cíclico, y en consecuencia, $DFOE$ es cíclico. Luego

$$C = DEA = DEF = DOF\,.$$

Por otro lado, $C = DOB$ luego $DOF = DOB$, y tenemos que B, F y O están alineados.

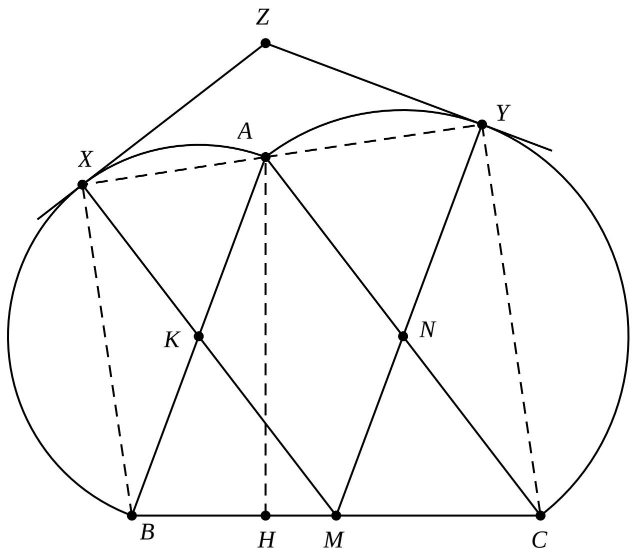


Problema 3.

Sea H en BC tal que $AH \perp BC$. Entonces los cuadriláteros $AXBH$ y $AYCH$ son cíclicos. Sabemos que KM y MN son paralelas a AC y AB respectivamente. De modo que podemos decir que $AKX = ANY = A$, luego $ABX = ACY = \frac{A}{2}$ y $XAB = YAC = 90^{\circ} - \frac{A}{2}$. Entonces X, A, Y son colineales.

$$AHX = ABX = \frac{A}{2} \text{ y } AHY = ACY = \frac{A}{2} \Rightarrow XHY = XMY = A\,.$$

Por lo tanto el cuadrilátero $XHMY$ es cíclico. Además sabemos que $MXZ = MYZ = 90^{\circ}$, luego el cuadrilátero $MXZY$ es cíclico. De modo que $ZXHMY$ es cíclico, luego el cuadrilátero $HXZY$ es cíclico.



Por otro lado, $ZYX = ACY = \frac{A}{2}$.

$$ZHX = ZYX = \frac{A}{2} \text{ y } AHX = \frac{A}{2} \Rightarrow ZHX = AHX \ .$$

De modo que los puntos *Z*, *A*, *H* son colineales y por ende $AZ \perp BC$.

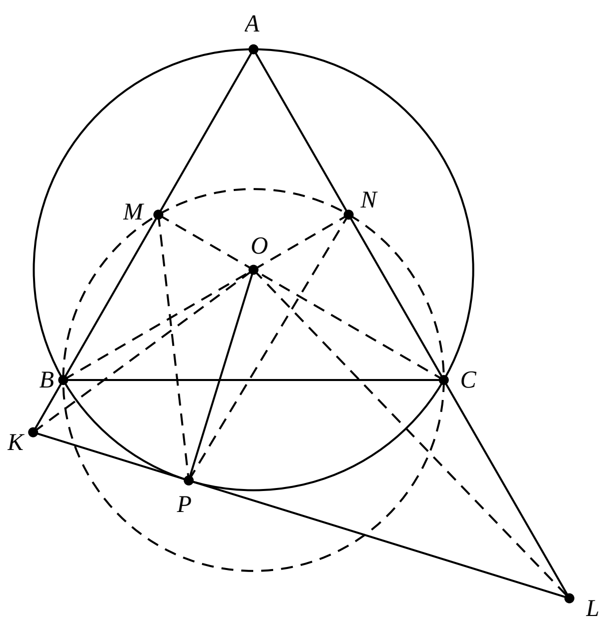
Problema 4.

Sean *M* y *N* los puntos medios de *AB* y *AC* respectivamente. Sabemos que el cuadrilátero *BMNC* es cíclico. Además $BPC = 120^{o} > 90^{o}$, de modo que podemos afirmar que el punto *P* pertenece al interior de la circunferencia circunscrita del cuadrilátero *BMNC*. Luego $MPN > MBN = 30^{o}$.

Por otra parte, los cuadriláteros *KMOP* y *NOPL* son cíclicos. Entonces

$$MKO = MPO \text{ y } NLO = NPO \Rightarrow AKO + ALO = MPN > 30^{o},$$

$$\Rightarrow KOL = A + AKO + ALO > 90^{o}.$$



Problema 5.

a) No existen tales 5 circunferencias. Supongamos, por el contrario, que sí existe, luego sus centros son 5 puntos tales que cada punto está a la misma distancia de 3 de los otros puntos y tiene distancia distinta al punto restante. Trazamos una flecha de cada punto al punto que está a distancia distinta.

Lema 1. No hay dos puntos O_i, O_j tales que cada uno de ellos es el punto a distancia distinta del otro.

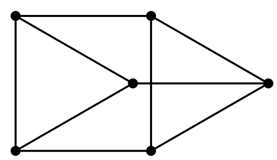
Demostración. Si tuviéramos esta situación entonces O_i y O_j tienen ambos igual distancia a los restantes puntos, luego ambos son el circuncentro de los restantes puntos, lo que es incorrecto.

Lema 2. No hay 4 puntos O_i, O_j, O_k, O_l tales que O_i, O_j tienen su flecha apuntando a O_k y O_k tiene su flecha apuntando a O_l.

Demostración. Nombramos O_m al punto restante, entonces las distancias desde O_i hasta O_j, O_l, O_m son iguales y las distancias desde O_j a O_i, O_l, O_m son iguales. Luego cada uno de O_l, O_m es el punto a distancia distinta de otro punto, lo que es incorrecto (según el lema 1).

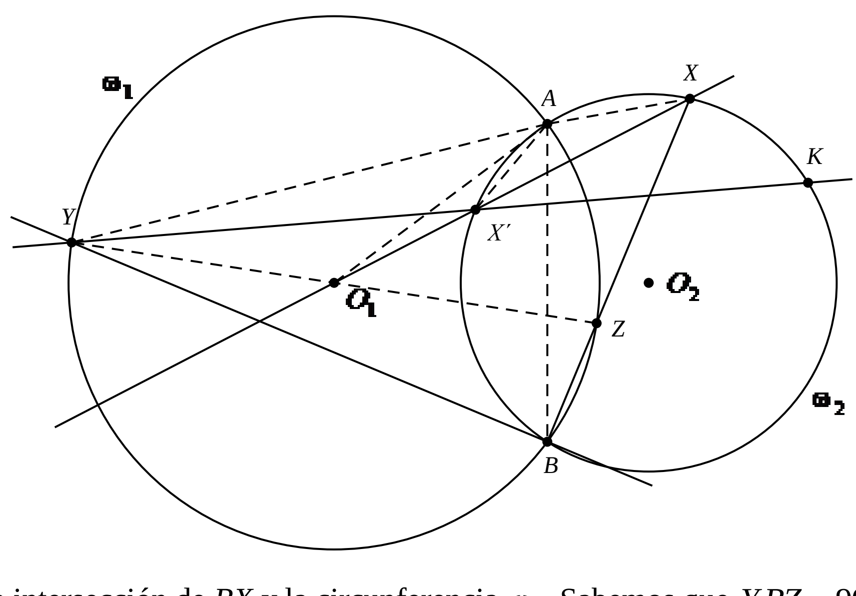
Entonces cada punto envía una flecha y recibe una flecha. Por el lema 1, no hay ciclos de 3 o 4 puntos. Luego solo tenemos un ciclo de 5 puntos. De modo que cada par de esos 5 puntos debe tener igual distancia, lo cual es imposible.

b) La siguiente figura muestra 6 puntos del plano tales que para cada punto existen exactamente otros 3 puntos en una circunferencia de radio 1.



Nivel Avanzado

Problema 1.



Sea Z el punto de intersección de BX y la circunferencia ω_1. Sabemos que $YBZ = 90^o$, luego los puntos Y, O_1, Z están alineados.

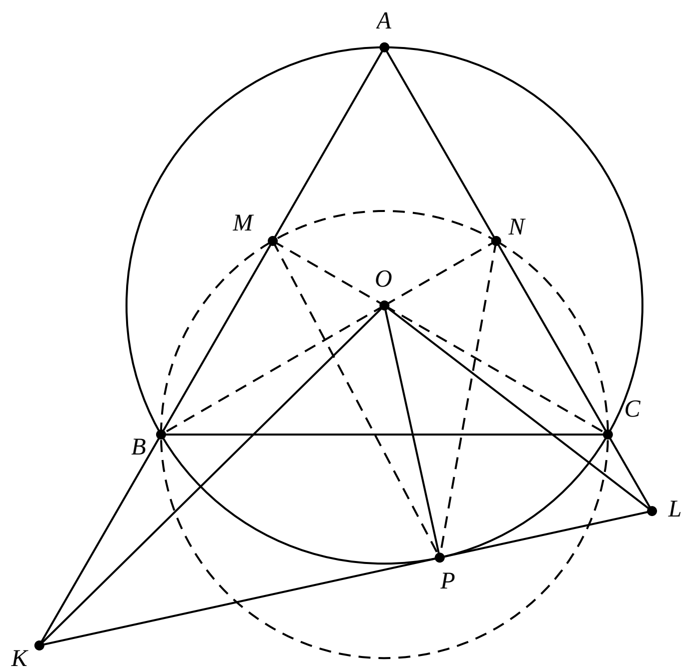
$O_1YA = ABX = AX'X \Rightarrow YAX'O_1$ es cíclico. Luego $YAO_1 = YX'O_1 = XX'K$.

Por otra parte sabemos que $AO_1 = YO_1$, de modo que $O_1YA = YAO_1$. Por lo tanto $AX'X = XX'K$. Entonces el punto X es el punto medio del arco AK.

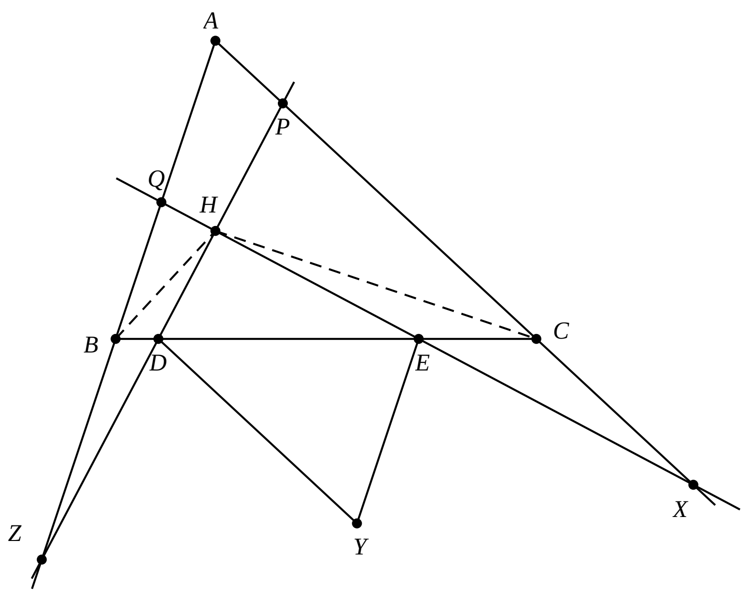
Problema 2.
Sean M y N los puntos medios de AB y AC respectivamente. Sabemos que el cuadrilátero $BMNC$ es cíclico. Además $BPC = 120^{\circ} > 90^{\circ}$, de modo que podemos afirmar que el punto P pertenece al interior de la circunferencia circunscrita del cuadrilátero $BMNC$. Luego $MPN > MBN = 30^{\circ}$.
Por otra parte, los cuadriláteros $KMOP$ y $NOPL$ son cíclicos. Entonces

$$MKO = MPO \text{ y } NLO = NPO \Rightarrow AKO + ALO = MPN > 30^{\circ},$$

$$\Rightarrow KOL = A + AKO + ALO > 90^{\circ}.$$



Problema 3.



Sea P el punto de intersección de HZ y AC, y sea Q el punto de intersección de HX y AB. Por el teorema de Menelao en los triángulos AQX y APZ podemos afirmar que

$$\frac{CX}{AC}\cdot\frac{AB}{BQ}\cdot\frac{QE}{EX}=1 \qquad (1) \qquad \text{y} \qquad \frac{BZ}{AB}\cdot\frac{AC}{PC}\cdot\frac{PD}{DZ}=1. \qquad (2)$$

Por otro lado, H es el ortocentro del triángulo ABC. De modo que $BH \perp AC$ y sabemos que $DHE = 90^{o}$, luego $HXA = BHZ = \alpha$. De modo similar podemos decir que $HZA = CHX = \theta$.

Por la ley de los senos en los triángulos HPC, HCX y HPX:

$$\frac{\operatorname{sen}(90^{o}-\theta)}{PC}=\frac{\operatorname{sen}(HCP)}{HP},\ \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{CX}=\frac{\operatorname{sen}(HCX)}{HX},\ \frac{HP}{HX}=\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(90^{o}-\alpha)}\Rightarrow\frac{PC}{CX}=\frac{\tan(\alpha)}{\tan(\theta)}.$$

De modo similar, por la ley de los senos en los triángulos HBQ, HBZ y HQZ, podemos demostrar:

$$\frac{BZ}{BQ}=\frac{\tan(\alpha)}{\tan(\theta)}\Rightarrow\frac{BZ}{BQ}=\frac{PC}{CX}\Rightarrow\frac{PC}{BZ}=\frac{CX}{BQ}. \qquad (3)$$

Por las igualdades (1), (2) y (3) podemos decir que

$$\frac{XE}{EQ}=\frac{PD}{ZD}. \qquad (4)$$

Supongamos que la recta que pasa por E y es paralela a AB corta a ZX en Y_1 y la recta que pasa por D y es paralela a AC corta a ZX en Y_2. Por el teorema de Thales podemos decir:

$$\frac{Y_1X}{ZY_1}=\frac{XE}{EQ},\ \frac{Y_2X}{ZY_2}=\frac{PD}{ZD}.$$

Por la igualdad (4) mostramos que $Y_1 \equiv Y_2$, luego Y pertenece a ZX.

Problema 4.

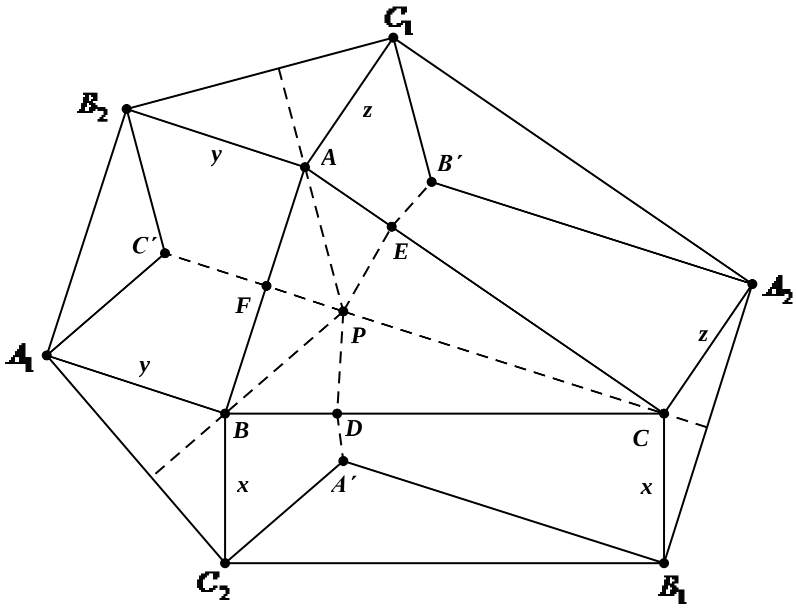
Supongamos que el triángulo ABC no es isósceles. En tal caso, hay cuatro puntos (de los 12) en cada lado del triángulo ABC. Supongamos que estos 12 puntos pertenecen a dos circunferencias ω_1 y ω_2. Entonces cada una de las circunferencias ω_1 y ω_2 corta a cada lado del triángulo ABC en exactamente dos puntos (y cada una de las circunferencias ω_1 y ω_2 no pasa por A, B, C). Sabemos que hay una cantidad par de intersecciones de ω_1 y los lados del triángulo ABC. También hay una cantidad par de intersecciones de ω_2 y los lados del triángulo ABC. Pero entre esos 12 puntos, exactamente 3 pertenecen a los lados del triángulo ABC y 3 es impar. Entonces tenemos una contradicción. Luego el triángulo ABC es isósceles.

Problema 5.

Sea l_A la recta que pasa por A y perpendicular a B_2C_1. Análogamente se definen l_B y l_C. Sean $CB_1 = BC_2 = x$, $BA_1 = AB_2 = y$, $AC_1 = CA_2 = z$. Por igualdad de ángulos podemos afirmar que:

$$\frac{\operatorname{sen}(A_1)}{\operatorname{sen}(A_2)}=\frac{y}{z},\ \frac{\operatorname{sen}(B_1)}{\operatorname{sen}(B_2)}=\frac{x}{y},\ \frac{\operatorname{sen}(C_1)}{\operatorname{sen}(C_2)}=\frac{z}{x}.$$

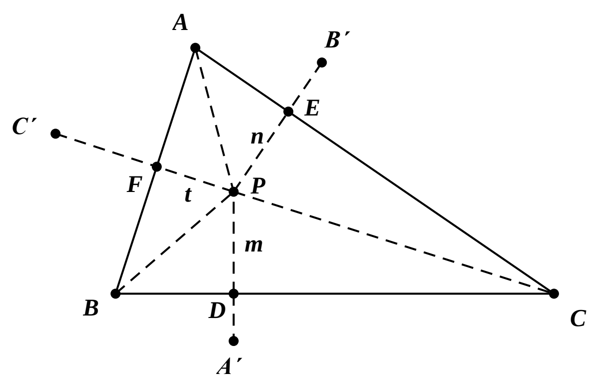
Por el teorema de Ceva trigonométrico en el triángulo ABC, las rectas l_A, l_B, l_C son concurrentes. Sea P el punto de intersección de l_A, l_B, l_C. Sabemos que los triángulos PBC y $A'C_2B_1$ son iguales (porque $BP \parallel A'C_2$, $CP \parallel A'B_1$, $BC \parallel B_1C_2$ y $BC = B_1C_2$). De modo que tenemos $PA' = x$, $PC' = y$, $PB' = z$, $PA' \perp BC$, $PB' \perp AC$, $PC' \perp AB$.



Supongamos que PA', PB', PC' cortan a *BC*, *AC*, *AB* en *D*, *E*, *F* respectivamente y $PD = m$, $PE = n$, $PF = t$. De acuerdo con la figura anterior tenemos:

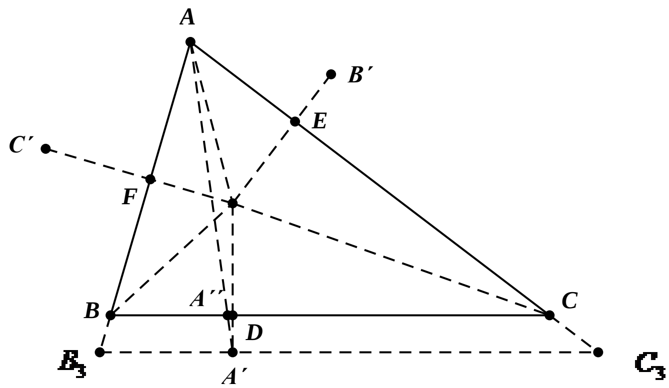
$$\frac{\operatorname{sen}(A_1)}{\operatorname{sen}(A_2)} = \frac{n}{t} = \frac{y}{z}, \quad \frac{\operatorname{sen}(B_1)}{\operatorname{sen}(B_2)} = \frac{t}{m} = \frac{x}{y}, \quad \frac{\operatorname{sen}(C_1)}{\operatorname{sen}(C_2)} = \frac{m}{n} = \frac{z}{x}.$$

Si $n = ky$ entonces $t = kz$, $m = \dfrac{kyz}{x}$.



Trazamos la recta por A' paralela a *BC*. La intersección de esta recta y las prolongaciones de *AB* y *AC* son B_3 y C_3 respectivamente. Sea A'' la intersección de AA' y *BC*. Por el teorema de Thales tenemos

$$\frac{BA''}{CA''} = \frac{B_3A'}{C_3A'}.$$



Sean $B_3PA' = \alpha$ y $C_3PA' = \theta$. Sabemos que los cuadriláteros PFB_3A' y PEC_3A' son cíclicos.
Luego $B_3FA' = \alpha$ y $C_3EA' = \theta$.
Por la ley de los senos en los triángulos PB_3A', PC_3A' y PC_3B_3:

$$\frac{B_3A'}{C_3A'} = \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\theta)}.$$

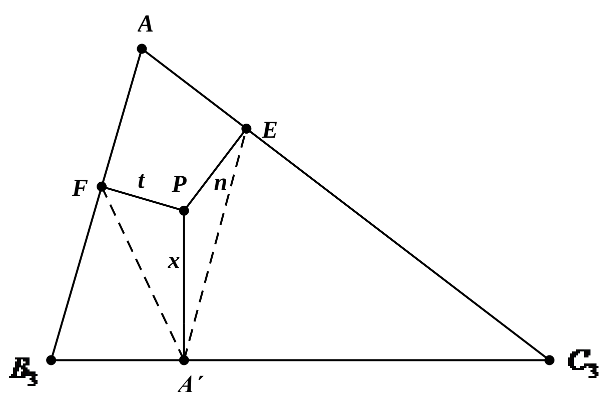
También por la ley de los senos, pero en el triángulo PFA':

$$\frac{t}{x} = \frac{\operatorname{sen}(B+\alpha-90^{\mathrm{o}})}{\cos(\alpha)} = \frac{\cos(B+\alpha)}{\cos(\alpha)} = \cos(B) - \tan(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(B)$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{\cos(B) - \frac{t}{x}}{\operatorname{sen}(B)}.$$

De modo similar podemos decir que:

$$\tan(\alpha) = \frac{\cos(C) - \frac{n}{x}}{\operatorname{sen}(C)} \Rightarrow \frac{B_3A'}{C_3A'} = \frac{BA''}{CA''} = \frac{x\cos(B)-t}{x\cos(C)-n}\cdot\frac{\operatorname{sen}(C)}{\operatorname{sen}(B)}.$$



De manera similar se calculan otras dos fracciones. Por el teorema de Ceva en el triángulo *ABC* tenemos que:

$$\frac{x\cos(B)-t}{x\cos(C)-n}\cdot\frac{\operatorname{sen}(C)}{\operatorname{sen}(B)}\cdot\frac{z\cos(C)-m}{z\cos(A)-t}\cdot\frac{\operatorname{sen}(A)}{\operatorname{sen}(C)}\cdot\frac{y\cos(A)-n}{y\cos(B)-m}\cdot\frac{\operatorname{sen}(B)}{\operatorname{sen}(A)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x\cos(B)-t}{x\cos(C)-n}\cdot\frac{z\cos(C)-m}{z\cos(A)-t}\cdot\frac{y\cos(A)-n}{y\cos(B)-m} = 1.$$

Por otra parte sabemos que:

$$n = ky\ ,\ \ t = kz\ ,\ \ m = \frac{kyz}{x}$$

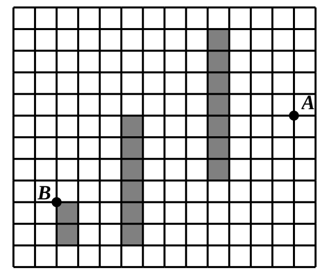
$$\Leftrightarrow \frac{x\cos(B) - kz}{x\cos(C) - ky} \cdot \frac{x\cos(C) - ky}{x\cos(A) - kx} \cdot \frac{x\cos(A) - kx}{x\cos(B) - kz} = 1\,.$$

Luego AA', BB', CC' son concurrentes.

Problemas de la tercera olimpiada iraní de geometría

Nivel Elemental: alumnos de 7º y 8º grados

1. Alí quiere ir del punto *A* al punto *B*. Está prohibido pasar por el interior de las áreas grises, pero se puede pasar en cualquier dirección dentro de las áreas blancas (no solo por líneas de la cuadrícula pero por todo el plano). Tenés que ayudar a Alí a encontrar el camino más corto entre *A* y *B*. Solo hay que dibujar el camino y escribir su longitud (cada cuadrito tiene lado 1).



2. Sea ω la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo *ABC* con $AC > AB$. Sean *X* un punto del lado *AC* e *Y* un punto de la circunferencia ω tal que $CX = CY = AB$. (Los puntos *A* e *Y* están en semiplanos distintos con respecto a la recta *BC*). La recta *XY* corta a ω por segunda vez en *P*. Demostrar que $PB = PC$.

3. Sea *ABCD* un cuadrilátero convexo sin lados paralelos. Cada dos lados consecutivos del *ABCD* se construye un paralelogramo usando esos dos lados consecutivos como lados del paralelogramo. Demostrar que entre los 4 nuevos puntos hay un solo punto en el interior del cuadrilátero *ABCD*.
ACLARACIÓN: Un cuadrilátero es convexo si no tiene entrecruzamientos y todos sus ángulos son menores de 180º.

4. En un triángulo rectángulo *ABC* ($A = 90^\circ$), la mediatriz de *BC* corta a la recta *AC* en *K* y la mediatriz de *BK* corta a la recta *AB* en *L*. Si la recta *CL* es la bisectriz del ángulo C, hallar todos los posibles valores de los ángulos B y C.

5. Sea *ABCD* un cuadrilátero convexo con las siguientes propiedades:
$ADC = 135^\circ$ y $ADB - ABD = 2DAB = 4CBD$.
Si $BC = \sqrt{2}CD$, demostrar que $AB = BC + AD$.

Tiempo: 3 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos

P

Problemas de la tercera olimpiada iraní de geometría

Nivel Medio: alumnos de 9º y 10º grados

1. En el trapecio *ABCD* con $AB \parallel CD$, ω_1 y ω_2 son dos circunferencias de diámetros *AD* y *BC* respectivamente. Sean *X* e *Y* dos puntos arbitrarios en ω_1 y ω_2 respectivamente. Demostrar que la longitud del segmento *XY* es menor o igual que la mitad del perímetro de *ABCD*.

2. Dos circunferencias C_1 y C_2 se cortan en *A* y *B*. La tangente a C_1 trazada por *A* corta a C_2 en *P* y la recta *PB* corta a C_1 por segunda vez en *Q* (suponer que *Q* está afuera de C_2). La tangente a C_2 trazada por *Q* corta a C_1 y C_2 en *C* y *D* respectivamente. (Los puntos *A* y *D* están en distintos semiplanos con respecto a la recta *PQ*.) Demostrar que *AD* es bisectriz del ángulo CAP.

3. Hallar todos los enteros positivos *N* tales que existe un triángulo que se puede dividir en *N* cuadriláteros semejantes.

4. Sea ω la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo *ABC* ($A = 90^{\circ}$). La tangente a ω trazada por *A* corta a la recta *BC* en *P*. Supongamos que *M* es el punto medio del (menor) arco AB, y *PM* corta a ω por segunda vez en *Q*. La tangente a ω trazada por *Q* corta a la recta *AC* en *K*. Demostrar que $PKC = 90^{\circ}$.

5. Las circunferencias ω y ω' se cortan en *A* y *B*. La tangente a ω trazada por *A* corta a ω' en *C* y la tangente a ω' trazada por *A* corta a ω en *D*. Supongamos que la bisectriz interior de CAD corta a ω y ω' en *E* y *F* respectivamente, y la bisectriz exterior de CAD corta a ω y ω' en *X* e *Y* respectivamente. Demostrar que la mediatriz de *XY* es tangente a la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo *BEF*.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos

Problemas de la tercera olimpiada iraní de geometría

Nivel Avanzado: alumnos de 11º y 12º grados

1. Las circunferencias ω y ω' se cortan en *A* y *B*. La tangente a ω trazada por *A* corta a ω' en *C* y la tangente a ω' trazada por *A* corta a ω en *D*. Supongamos que el segmento *CD* corta a ω y ω' en *E* y *F* respectivamente (suponer que *E* está entre *F* y *C*). La perpendicular a *AC* trazada por *E* corta a ω' en *P* y la perpendicular a *AD* trazada por *F* corta a ω en el punto *Q*. (Los puntos *A*, *P* y *Q* están del mismo lado de la recta *CD*.) Demostrar que los puntos *A*, *P* y *Q* son colineales.

2. En el triángulo acutángulo *ABC*, la altura trazada desde *A* corta al lado *BC* en *D*, y *M* es el punto medio de *AC*. Supongamos que *X* es un punto tal que $AXB = DXM = 90^{o}$ (suponer que *X* y *C* están en semiplanos opuestos respecto de la recta *BM*). Demostrar que $XMB = 2MBC$.

3. Sea *P* el punto de intersección de los lados *AD* y *BC* del cuadrilátero convexo *ABCD*. Supongamos que I_1 e I_2 son los incentros de los triángulos *PAB* y *PDC* respectivamente. Sea *O* el circuncentro del triángulo *PAB* y *H* el ortocentro del triángulo *PDC*. Demostrar que las circunferencias circunscritas de los triángulos AI_1B y *DHC* son tangentes entre sí si y solo sí las circunferencias circunscritas de los triángulos *AOB* y DI_2C son tangentes entre sí.

4. En un cuadrilátero convexo *ABCD* las rectas *AB* y *CD* se cortan en *E* y las rectas *AD* y *BC* se cortan en *F*. Sea *P* el punto de intersección de las diagonales *AC* y *BD*. Supongamos que ω_1 es una circunferencia que pasa por *D* y es tangente a *AC* en *P*. También supongamos que ω_2 es una circunferencia que pasa por *C* y es tangente a *BD* en *P*. Sea *X* el punto de intersección de ω_1 y *AD*, e *Y* el punto de intersección de ω_2 y *BC*. Supongamos que las circunferencias ω_1 y ω_2 se cortan por segunda vez en *Q*. Demostrar que la perpendicular trazada desde *P* a la recta *EF* pasa por el circuncentro del triángulo *XQY*.

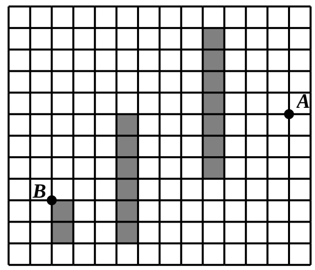
5. ¿Existen seis puntos del plano $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ tales que todos los triángulos $X_iY_jZ_k$ son semejantes para $1 \le i, j, k \le 2$?

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos

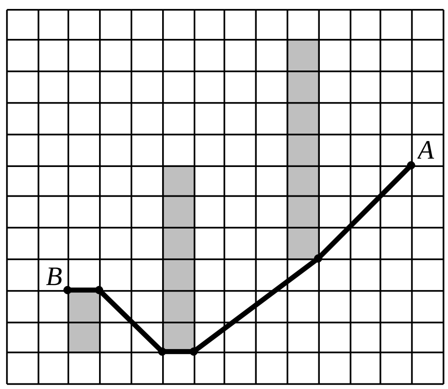
Soluciones IGO 2016

Nivel Elemental

1. Alí quiere ir del punto *A* al punto *B*. Está prohibido pasar por el interior de las áreas grises, pero se puede pasar en cualquier dirección dentro de las áreas blancas (no solo por líneas de la cuadrícula sino por todo el plano). Tenés que ayudar a Alí a encontrar el camino más corto entre *A* y *B*. Solo hay que dibujar el camino y escribir su longitud (cada cuadrito tiene lado 1).



Solución

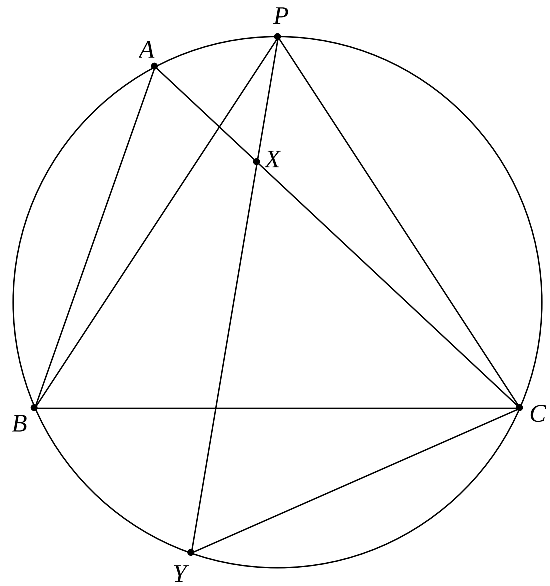


Por el teorema de Pitágoras la longitud del camino más corto es

$$\sqrt{3^2+3^2}+\sqrt{4^2+3^2}+1+\sqrt{2^2+2^2}+1=3\sqrt{2}+5+1+2\sqrt{2}+1=7+5\sqrt{2}\ .$$

2. Sea ω la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo *ABC* con $AC > AB$. Sean *X* un punto del lado *AC* e *Y* un punto de la circunferencia ω tal que $CX = CY = AB$. (Los puntos *A* e *Y* están en semiplanos distintos con respecto a la recta *BC*). La recta *XY* corta a ω por segunda vez en *P*. Demostrar que $PB = PC$.

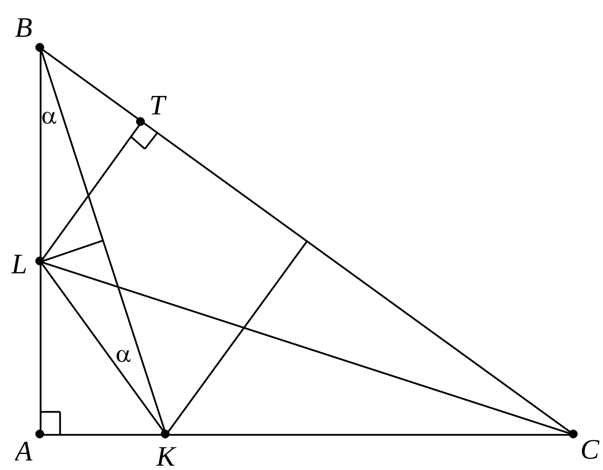
Solución



Como el triángulo *CXY* es isósceles, $CXY = CYX = CYP$.
Por propiedad del ángulo exterior, $CXY = CPX + PCX = CPY + ACP$.
Por propiedad de los ángulos inscritos en una circunferencia con cuerdas iguales, $CYP = CBP$ y $CPY + ACP = ACB + ACP = BCP$.
Luego, en el triángulo *BCP*, $BCP = CBP$ y entonces el triángulo es isósceles, con *PB* = *PC*.

4. En un triángulo rectángulo *ABC* ($A = 90^{o}$), la mediatriz de *BC* corta a la recta *AC* en *K* y la mediatriz de *BK* corta a la recta *AB* en *L*. Si la recta *CL* es la bisectriz del ángulo C, hallar todos los posibles valores de los ángulos B y C.

Solución
Si $AB < AC$:

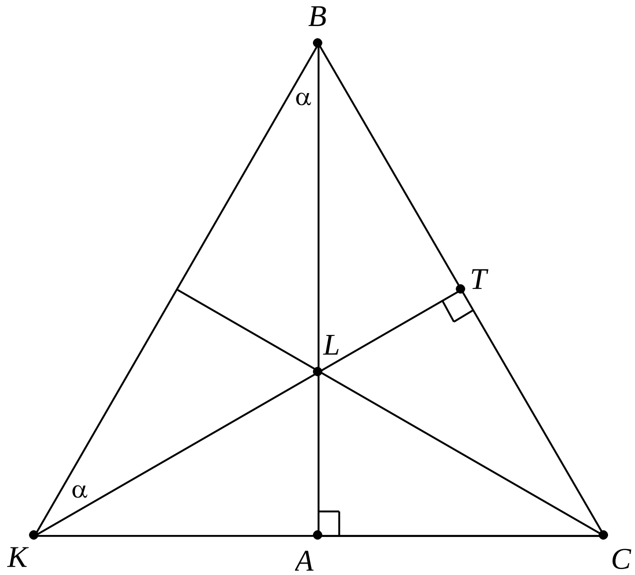


Sea $LBK = \alpha$. Como *L* pertenece a la mediatriz de *BK* tenemos que $LKB = \alpha$. Por ángulo exterior del triángulo *BKL*, $ALK = 2\alpha$ y entonces $LKA = 90^{o} - 2\alpha$.
Como *K* pertenece a la mediatriz de *BC*, *BK* = *CK*, luego $KBC = KCB$ y dado que $BKA = KBC + KCB$,

$$KBC = KCB = \frac{1}{2} BKA = \frac{90^{o} - \alpha}{2} = 45^{o} - \frac{\alpha}{2}.$$

Sea *T* el pie de la perpendicular por *L* a *BC*. Como *CL* es la bisectriz de C, *LT* = *LA*. Teníamos, además, que *BL* = *KL*, luego los triángulos rectángulos *BTL* y *KAL* son iguales. Por lo tanto $LBT = LKA$, de donde $\alpha + 45^{o} - \dfrac{\alpha}{2} = 90^{o} - 2\alpha$ y $\alpha = 18^{o}$. Entonces $B = 45^{o} + \dfrac{\alpha}{2} = 54^{o}$ y $C = 36^{o}$.

Si $AB > AC$:



Como antes, $LBK = LKB = \alpha$ y $KLA = 2\alpha$, $LKA = 90^{o} - 2\alpha$.
Sea *T* en *BC* tal que $LT \perp BC$.

Como *CL* es la bisectriz de C, *LT* = *LA*; también *LB* = *LK* por estar *L* en la mediatriz de *BK*. Luego los triángulos *BTL* y *KAL* son iguales y tenemos $LBT = LKA = 90^{o} - 2\alpha$.

Entonces $CBK = BKC = 90^{o} - \alpha$ y *BC* = *CK*. También, como *K* pertenece a la mediatriz de *BC*, *BK* = *CK*. Luego *BKC* es equilátero y tenemos $90^{o} - \alpha = 60^{o}$, de modo que $\alpha = 30^{o}$ y $B = 90^{o} - 2\alpha = 30^{o}$ y $C = 60^{o}$.

Si *AB* = *AC*:

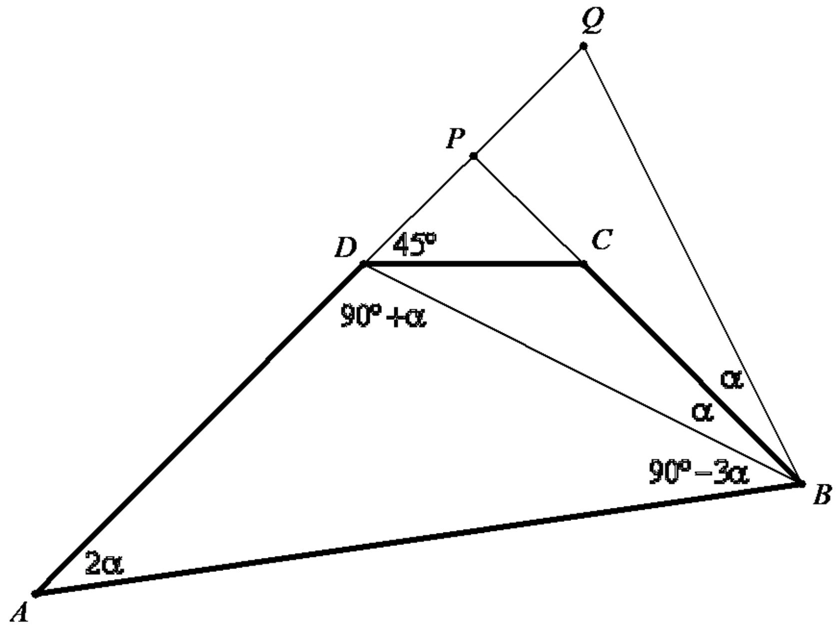
En este caso *K* coincide con *A* y *L* es el punto medio de *AB*. Sea *T* en *BC* tal que $LT \perp BC$. Entonces *CL* es la bisectriz de C, luego *LT* = *LA* = *LB*, y esto es imposible.

5, Sea *ABCD* un cuadrilátero convexo con las siguientes propiedades:

$$ADC = 135^{o} \quad \text{y} \quad ADB - ABD = 2DAB = 4CBD.$$

Si $BC = \sqrt{2}CD$, demostrar que $AB = BC + AD$.

Solución



Sea $CBD = \alpha$, entonces $DAB = 2\alpha$, $ADB - ABD = 4\alpha$, y en el triángulo *ABD*, $ADB + ABD = 180º - 2\alpha$. Sumando y restando las últimas dos igualdades resulta $ADB = 90º + \alpha$ y $ABD = 90º - 3\alpha$.

Luego $DAB + CBA = 90º$.

Sea *P* el punto de intersección de las rectas *AD* y *BC*. Por lo anterior, $APB = 90º$. Por hipótesis, $PDC = 180º - 135º = 45º$, por lo tanto

$$PD = \frac{\sqrt{2}}{2} CD = \frac{BC}{2}.$$

Sea *Q* el simétrico de *D* respecto de *P*, entonces $QD = 2PD = BC$.

Por la simetría, los triángulos *DPB* y *QPB* son iguales, entonces $CBD = CBQ = \alpha$, luego $ABQ = ABD + QBC = 90º - 3\alpha + 2\alpha = 90º - \alpha$. Además $AQB = 90º - \alpha$ pues el ángulo en *P* es recto.

Luego, el triángulo *ABQ* es isósceles, de modo que

$$AB = AQ = DQ + AD = 2PD + AD = BC + AD.$$

La solución está completa.

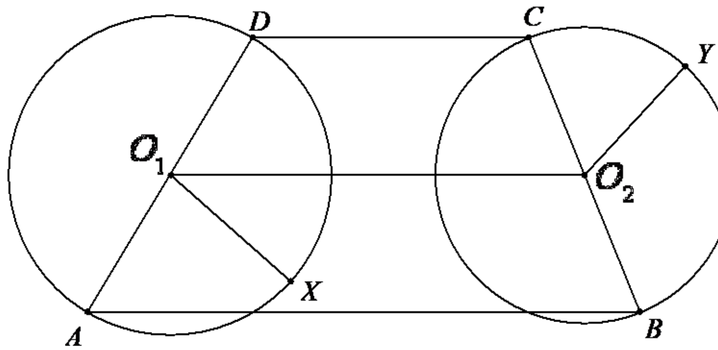
Nivel Medio

1. En el trapecio *ABCD* con $AB \parallel CD$, ω_1 y ω_2 son dos circunferencias de diámetros *AD* y *BC* respectivamente. Sean *X* e *Y* dos puntos arbitrarios en ω_1 y ω_2 respectivamente.

Demostrar que la longitud del segmento *XY* es menor o igual que la mitad del perímetro de *ABCD*.

Solución

Sean O_1 y O_2 los centros de las circunferencias ω_1 y ω_2 respectivamente, entonces O_1 y O_2 son los puntos medios de *AD* y *BC* respectivamente.



Luego $XO_1 = \frac{AD}{2}$, $YO_2 = \frac{BC}{2}$, $O_1O_2 = \frac{AB+CD}{2}$ (base media del trapecio). Entonces

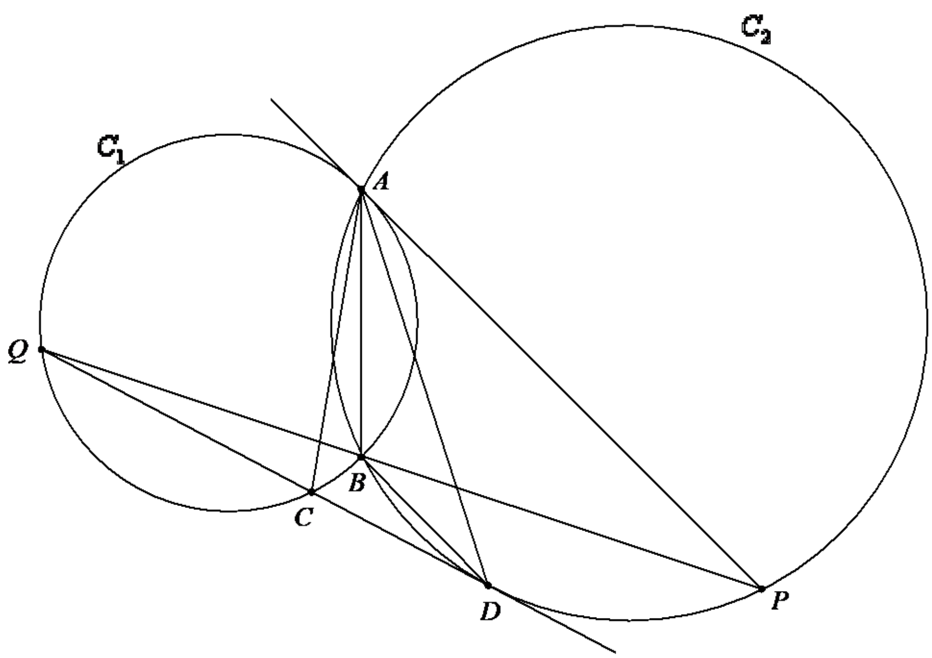
$$XY \le XO_1 + O_1O_2 + O_2Y \le \frac{AD}{2} + \frac{AB+CD}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AB+BC+CD+DA}{2},$$

como queríamos.

2. Dos circunferencias C_1 y C_2 se cortan en A y B. La tangente a C_1 trazada por A corta a C_2 en P y la recta PB corta a C_1 por segunda vez en Q (suponer que Q está afuera de C_2). La tangente a C_2 trazada por Q corta a C_1 y C_2 en C y D respectivamente. (Los puntos A y D están en distintos semiplanos con respecto a la recta PQ.)

Demostrar que AD es bisectriz del ángulo CAP.

Solución



Por ángulos inscritos en C_1 sobre la misma cuerda, $CAB = CQB$.

También, en C_2, $DAB = BDQ$ por propiedad del ángulo seminscrito.

Entonces

$$CAD = CAB + DAB = CQB + BDQ = DQB + BDQ = PBD,$$

por la propiedad del ángulo exterior. Pero $PBD = PAD$, nuevamente por ser inscritos con el mismo arco en C_2. Así, $CAD = PAD$ y resulta que AD es la bisectriz de CAP, como queríamos.

3. Hallar todos los enteros positivos N tales que existe un triángulo que se puede dividir en N

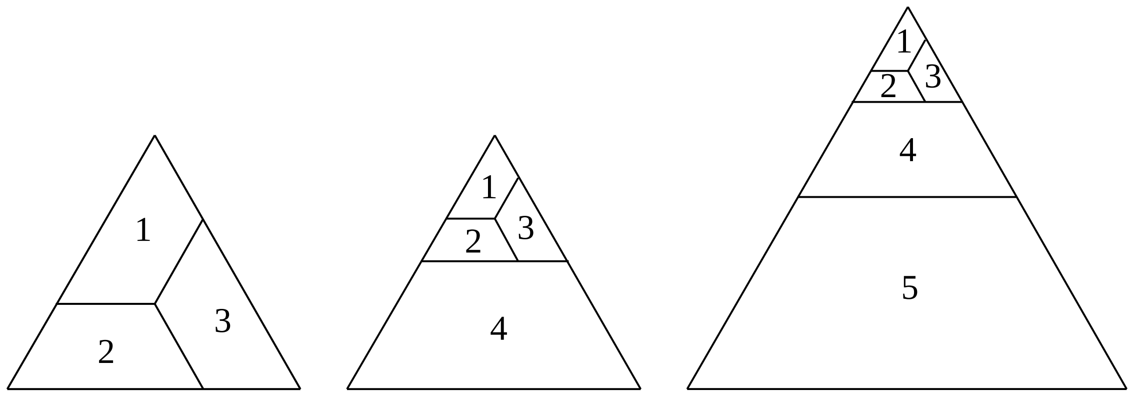
cuadriláteros semejantes.

Solución

Para $N = 1$ es imposible.

También es imposible para $N = 2$ pues uno será cóncavo y el otro convexo.

Para $N \geq 3$ podemos hacer divisiones del siguiente tipo en un triángulo equilátero:



4. Sea ω la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo ABC ($A = 90^{o}$). La tangente a ω trazada por A corta a la recta BC en P.

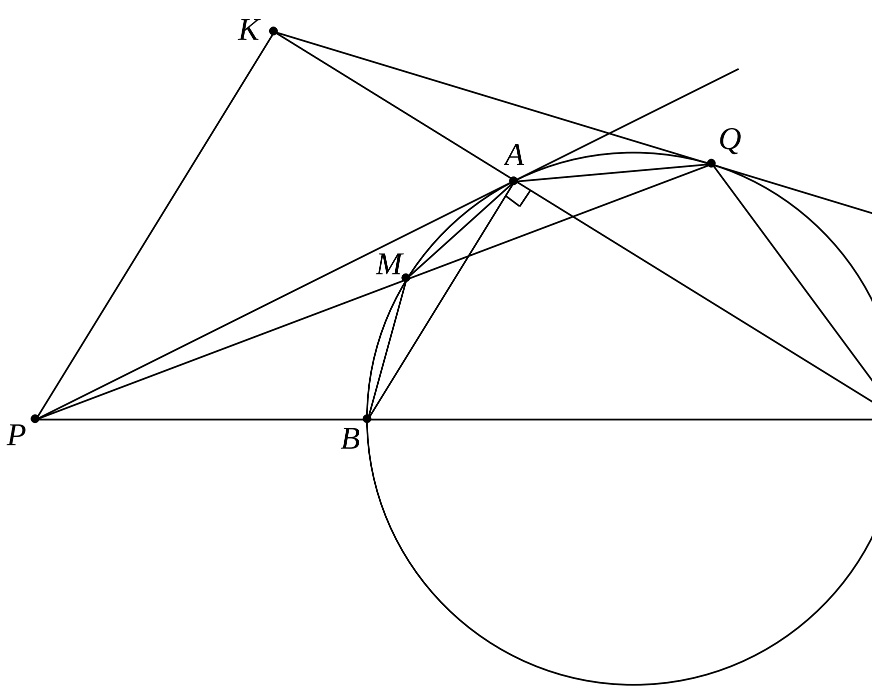
Supongamos que M es el punto medio del (menor) arco AB, y PM corta a ω por segunda vez en Q.

La tangente a ω trazada por Q corta a la recta AC en K. Demostrar que $PKC = 90^{o}$.

Solución

Haremos el caso $AB < AC$, el caso $AB > AC$ es análogo.

Usaremos repetidas veces que si trazamos por P una tangente a la circunferencia en X y una secante en Y y Z, con Y entre P y Z, entonces los triángulos PXY y PZX son semejantes. También, si trazamos desde P dos secantes a la circunferencia, con P, X, Y en una recta y P, W, Z en la otra, en ese orden, entonces los triángulos PXW y PZY son semejantes.



Como $BAC = 90^{o}$, es suficiente demostrar que $PK \parallel BA$.

Por lo enunciado al comienzo, los triángulos *PAQ* y *PMA* son semejantes, entonces $\frac{AQ}{MA}=\frac{PQ}{PA}$; el triángulo *PBM* es semejante al *PQC*, luego $\frac{BM}{QC}=\frac{PB}{PQ}$; los triángulos *PBA* y *PAC* son semejantes, de modo que $\frac{PB}{PA}=\frac{BA}{AC}$.

Sabemos que *BM* = *MA* entonces de acuerdo con las tres relaciones de arriba podemos afirmar que

$$\frac{AQ}{MA}\cdot\frac{BM}{QC}=\frac{PQ}{PA}\cdot\frac{PB}{PQ},$$

$$\frac{AQ}{QC}=\frac{PB}{PA}=\frac{BA}{AC}. \qquad (1)$$

Los triángulos *KAQ* y *KQC* son semejantes, de modo que $\frac{KA}{KQ}=\frac{KQ}{KC}=\frac{AQ}{QC}$. Multiplicando las dos primeras y elevando la tercera al cuadrado obtenemos

$$\frac{KA}{KQ}\cdot\frac{KQ}{KC}=\left(\frac{AQ}{QC}\right)^2,$$

$$\frac{KA}{KC}=\left(\frac{AQ}{QC}\right)^2. \qquad (2)$$

Los triángulos *PBA* y *PAC* son semejantes, luego $\frac{PB}{PA}=\frac{PA}{PC}=\frac{BA}{AC}$, de modo que, como antes,

$$\frac{PB}{PC}=\left(\frac{BA}{AC}\right)^2. \qquad (3)$$

De (1), (2) y (3)

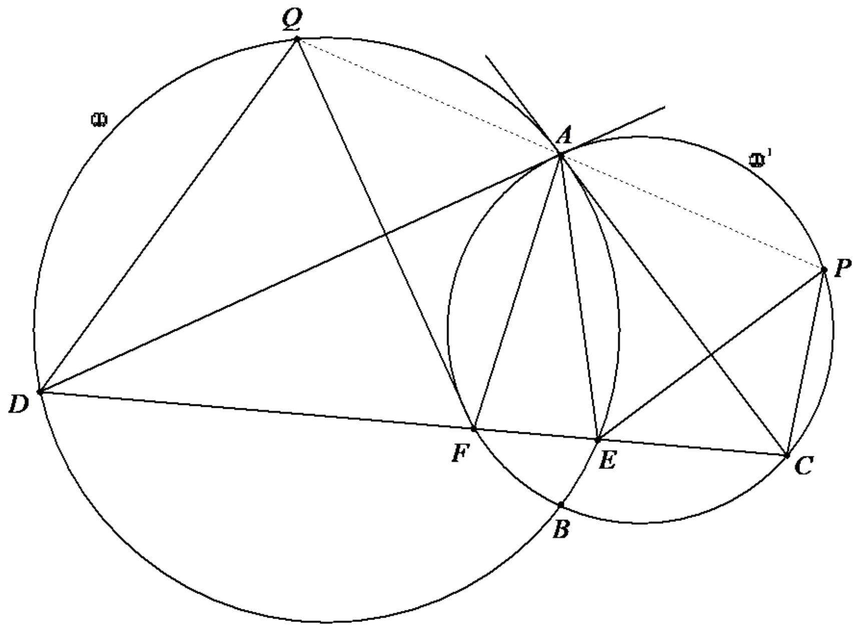
$$\frac{KA}{KC}=\frac{PB}{PC}.$$

Por el teorema de Thales, $PK \parallel BA$, como queríamos demostrar.

Nivel Avanzado

1. Las circunferencias ω y ω' se cortan en *A* y *B*. La tangente a ω trazada por *A* corta a ω' en *C* y la tangente a ω' trazada por *A* corta a ω en *D*. Supongamos que el segmento *CD* corta a ω y ω' en *E* y *F* respectivamente (suponer que *E* está entre *F* y *C*). La perpendicular a *AC* trazada por *E* corta a ω' en *P* y la perpendicular a *AD* trazada por *F* corta a ω en el punto *Q*. (Los puntos *A*, *P* y *Q* están del mismo lado de la recta *CD*.) Demostrar que los puntos *A*, *P* y *Q* son colineales.

Solución



En ω' el ángulo inscrito AFC es igual al seminscrito que forman *AC* y la tangente *AD*; en ω el ángulo inscrito AED es igual al seminscrito que forman *AD* y la tangente *AC*. En consecuencia,

$$AFC = AED = 180^o - CAD .$$

En ω tenemos que $AED + AQD = 180^o$, por opuestos en el cuadrilátero cíclico *AQDE*, luego $AEF = 180^o - AQD$. Por lo tanto $AFD = AQD$. Entonces *Q* y *F* son simétricos respecto de *AD*, pues $FQ \perp AD$ y $AFD = AQD$.

De modo completamente análogo se demuestra que *P* y *E* son simétricos respecto de *AC*.

Entonces $DAQ = DAF$ y como éste es seminscrito en ω', $DAF = ACF$ pues ACF está inscrito en ω'. Análogamente obtenemos que

$$CAP = CAE = ADE .$$

Luego

$$DAQ + CAD + CAP = ACF + CAD + ADE = ACD + CAD + ADC = 180^o ,$$

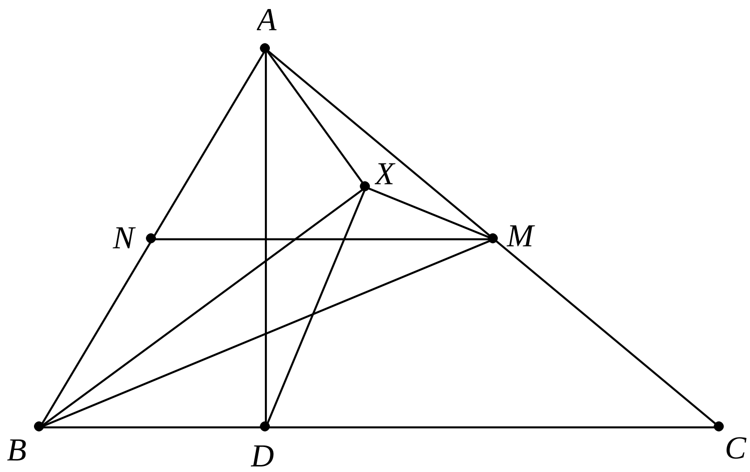
de modo que los puntos *A*, *P*, *Q* son colineales, como queríamos ver.

2. En el triángulo acutángulo *ABC*, la altura trazada desde *A* corta al lado *BC* en *D*, y *M* es el punto medio de *AC*.

Supongamos que *X* es un punto tal que $AXB = DXM = 90^o$ (suponer que *X* y *C* están en semiplanos opuestos respecto de la recta *BM*).

Demostrar que $XMB = 2MBC$.

Solución



Sea *N* el punto medio del lado *AB*, luego $MN \parallel BC$, por ser *MN* base media, y $MBC = NMB$ (alternos internos entre paralelas). Entonces basta demostrar que *MN* es la bisectriz del ángulo XMB.

Como $AXB = 90^{\circ}$ y $ADB = 90^{\circ}$ tenemos que el cuadrilátero *AXDB* es cíclico y el centro de la circunferencia que lo circunscribe es *N*.

Ahora, $BXD = BAD = 90^{\circ} - ABC$, entonces

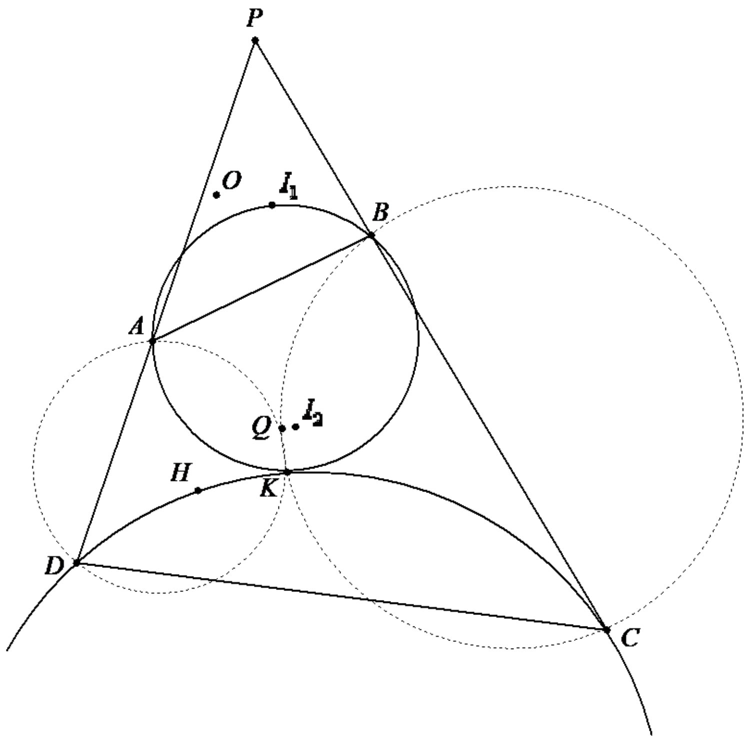
$$BXM = BXD + DXM = 90^{\circ} - ABC + 90^{\circ} =$$
$$= 180^{\circ} - ABC = 180^{\circ} - ANM = BNM .$$

De esta última igualdad se deduce que el cuadrilátero *BNXM* es cíclico. Por otro lado, como *N* es el centro de la circunferencia por *A*, *X*, *D*, *B*, $NX = NB$. Entonces, en la circunferencia por *B*, *N*, *X*, *M* tenemos $XMN = BMN$ pues subtienden cuerdas iguales, y resulta que *MN* es bisectriz de XMB, como queríamos demostrar.

3. Sea *P* el punto de intersección de los lados *AD* y *BC* del cuadrilátero convexo *ABCD*. Supongamos que I_1 e I_2 son los incentros de los triángulos *PAB* y *PDC* respectivamente. Sea *O* el circuncentro del triángulo *PAB* y *H* el ortocentro del triángulo *PDC*.

Demostrar que las circunferencias circunscritas de los triángulos AI_1B y *DHC* son tangentes entre sí si y solo si las circunferencias circunscritas de los triángulos *AOB* y DI_2C son tangentes entre sí.

Solución



Supongamos que los puntos se encuentran como en la figura. Otros casos son análogos.
Sea K el punto de tangencia de las circunferencias circunscritas a AI_1B y DHC. Sea Q el segundo punto de intersección de las circunferencias AKD y BKC.

Por ángulos inscritos en la circunferencia circunscrita al triángulo DHC, $DKC = DHC$. Como DH y CH son alturas en el triángulo DPC, tenemos que

$$DHC = 180^\circ - HDC - HCD = 180^\circ - \left(90^\circ - PCD\right) - \left(90^\circ - PDC\right) =$$

$$= PCD + PDC = 180^\circ - P.$$

De este modo obtenemos que

$$DKC = 180^\circ - P. \qquad (1)$$

Ahora $P + PDK + PCK = DKC$, luego por (1),

$$PDK + PCK = 180^\circ - 2P. \qquad (2)$$

Como $AQKD$ es cíclico,

$$AQK = 180^\circ - ADK = 180^\circ - PDK, \qquad (3)$$

y como el cuadrilátero $BQKC$ es cíclico,

$$BQK = 180^\circ - BCK = 180^\circ - PCK. \qquad (4)$$

Usando (2), (3) y (4) obtenemos

$$AQB = 360^\circ - BQK - AQK = 360^\circ - \left(180^\circ - PCK\right) - \left(180^\circ - PDK\right) =$$

$$= PCK + PDK = 180^\circ - 2P.$$

Como O es el circuncentro del triángulo ABP, $AOB = 2P$ y tenemos $AQB = 180^\circ - 2P = 180^\circ - AOB$, de donde el cuadrilátero $AOBQ$ es cíclico.
Por ángulos inscritos,

$$CQD = CQK + KQD = CBK + KAD = \left(180^\circ - KBP\right) + \left(180^\circ - KAP\right) =$$

$$= 360^\circ - \left(KBP + KAP\right) = P + AKB,$$

donde la última igualdad es por suma de ángulos interiores en el cuadrilátero $PAKB$. Pero

$$P + AKB = 180^\circ - AI_1B + P = \frac{1}{2}\left(PAB + PBA\right) + P =$$

$$= 90^\circ - \frac{P}{2} + P = 90^\circ + \frac{P}{2} = CI_2D,$$

por ser I_2 el incentro del triángulo *PCD*. Por lo tanto, el cuadrilátero $CDQI_2$ es cíclico.
Tenemos que probar que las circunferencias circunscritas a los triángulos *AOB* y DI_2C son tangentes en *Q*. Para ello es suficiente demostrar que $ABQ + DCQ = AQD$.
Sabemos que las circunferencias circunscritas a los triángulos AI_1B y *DHC* son tangentes en *K*, por lo tanto $ABK + KCD = AKD$. Luego

$$\left(ABQ + KBQ\right) + \left(DCQ - KCQ\right) = AKD.$$

Pero $KBQ = KCQ$ y $AKD = AQD$, por lo tanto

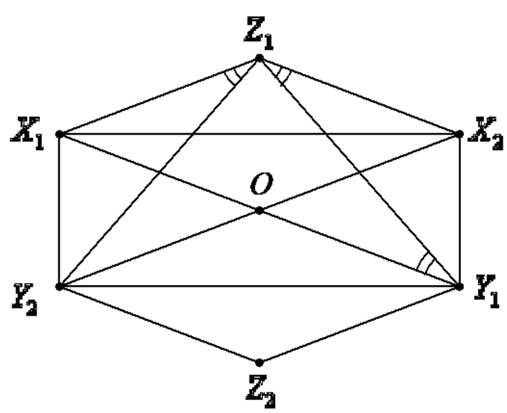
$$ABQ + DCQ = AQD.$$

Esto completa la demostración de la primera implicación. Para la segunda, seguimos exactamente el mismo procedimiento en sentido inverso.

5. ¿Existen seis puntos del plano $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ tales que todos los triángulos $X_iY_jZ_k$ son semejantes para $1 \le i, j, k \le 2$?

Solución

La respuesta es sí. Sea $X_1X_2Y_1Y_2$ un rectángulo de lados $X_1X_2 = 2a$ y $X_1Y_2 = 2b$. Sea *O* el punto de intersección de las diagonales X_1Y_1 y X_2Y_2, y sean Z_1 y Z_2 los simétricos de *O* respecto de X_1X_2 e Y_1Y_2 respectivamente.



Por la simetría de la figura, es evidente que los cuatro triángulos

$$X_1Y_2Z_1,\ X_1Y_2Z_2,\ X_2Y_1Z_1,\ X_2Y_1Z_2$$

son congruentes. Lo mismo sucede con los triángulos

$$X_1Y_1Z_1,\ X_1Y_1Z_2,\ X_2Y_2Z_1,\ X_2Y_2Z_2.$$

Entonces, para que esta configuración de seis puntos cumpla la condición del enunciado alcanza con asegurarse de que $X_1Y_2Z_1$ y $X_1Y_1Z_1$ sean semejantes.

Observemos que $X_1Z_1Y_2 = X_2Z_1Y_1 = Z_1Y_1X_1$, donde la primera igualdad es por simetría y la segunda porque $Z_1X_2 \parallel X_1Y_1$. Por lo tanto, si se cumple que $\frac{X_1Z_1}{Z_1Y_2} = \frac{Z_1Y_1}{Y_1X_1}$, los triángulos serán semejantes.

Podemos calcular estas longitudes usando el teorema de Pitágoras:

$$X_1Z_1 = X_1O = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$Z_1Y_2 = Z_1Y_1 = \sqrt{a^2 + (3b)^2} = \sqrt{a^2 + 9b^2}$$
$$Y_1X_1 = \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

Buscamos entonces que

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + 9b^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + 9b^2}}{2\sqrt{a^2 + b^2}}\ ,$$

es decir,

$$2\left(a^2 + b^2\right) = a^2 + 9b^2\ ,$$
$$2a^2 + 2b^2 = a^2 + 9b^2\ ,$$
$$a^2 = 7b^2\ ,$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 7\ ,$$
$$\frac{a}{b} = \sqrt{7}\ .$$

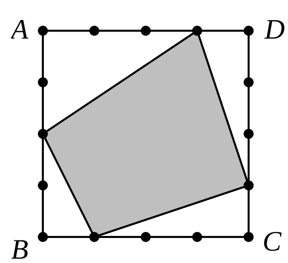
Por lo tanto, haciendo la construcción descripta comenzando con un rectángulo de lados $2a$ y $2b$ tales que $\frac{a}{b} = \sqrt{7}$ obtenemos seis puntos que cumplen lo que pide el enunciado.

IGO 2017

E1

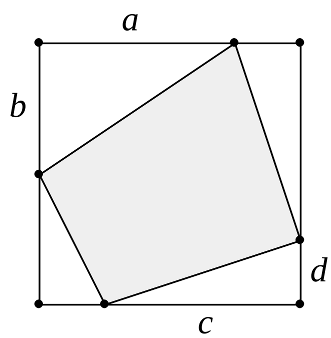
Cada lado de un cuadrado *ABCD* de lados de longitud 4 se divide en cuatro partes iguales mediante tres puntos. Se elige uno de esos tres puntos en cada lado y se unen consecutivamente para obtener un cuadrilátero.

¿Qué números pueden ser el área de dicho cuadrilátero?



Solución

Denotamos *a*, *b*, *c*, *d* a las distancias de los vértices del cuadrilátero a los vértices del cuadrado, como se indica en la figura.



Entonces, el área del cuadrilátero sombreado es igual al área del cuadrado menos las áreas de los cuatro triángulos rectángulos que componen la parte no sombreada, es decir:

$$4\cdot 4-\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}cd-\frac{1}{2}(4-a)(4-d)-\frac{1}{2}(4-b)(4-c)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(32-ab-cd-16+4a+4b-ad-16+4b+4c-bc\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-(a+c)(b+d)+4a+4b+4c+4d\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(4-a-c\right)\left(4-b-d\right)+8.$$

Los valores posibles de *a*, *b*, *c*, *d* son 1, 2 y 3, de modo que *a* + *c* y *b* + *d* pueden valer

1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, 1 + 3 = 4, 2 + 2 = 4, 2 + 3 = 5 ó 3 + 3 = 6.

En tal caso, 4 – *a* – *c* y 4 – *b* – *d* pueden valer 2, 1, 0, 0, –1 ó –2.

Los posibles resultados de multiplicar dos de estos números son:

	2	1	0	–1	–2
2	4	2	0	–2	–4
1	2	1	0	–1	–2
0	0	0	0	0	0
–1	–2	–1	0	1	2
–2	–4	–2	0	2	4

Eliminando las repeticiones tenemos

4, 2, 1, 0, –1, –2, –4.

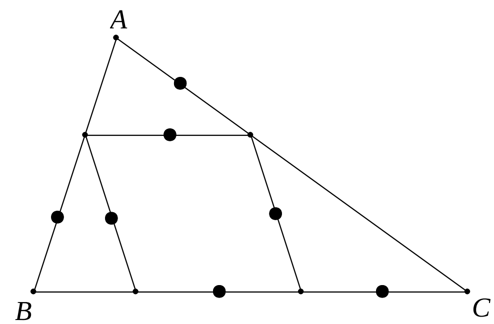
Los valores posibles del área del cuadrilátero son

$$-\frac{1}{2}\cdot 4+8=\boxed{6},\quad -\frac{1}{2}\cdot 2+8=\boxed{7},\quad -\frac{1}{2}\cdot 1+8=\boxed{7{,}5},\quad -\frac{1}{2}\cdot 0+8=\boxed{8},$$

$$-\frac{1}{2}\cdot(-1)+8=\boxed{8{,}5},\quad -\frac{1}{2}\cdot(-2)+8=\boxed{9},\quad -\frac{1}{2}\cdot(-4)+8=\boxed{10}.$$

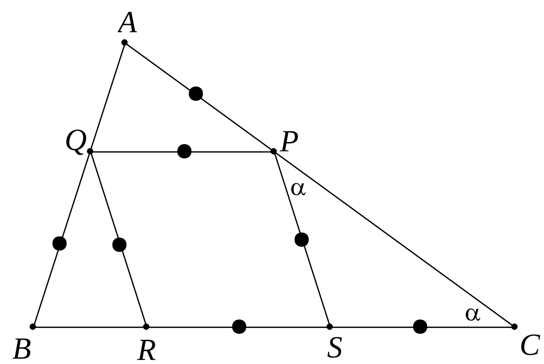
E2

Hallar los ángulos del triángulo *ABC*, sabiendo que los 7 segmentos señalados con un punto tienen la misma longitud.



Solución

Sean *P*, *Q*, *R* y *S* los vértices del rombo, como se ve en la figura.



Sea $\alpha = ACB$, entonces $CPS = \alpha$. Además $PSR = 2\alpha$ por ser ángulo exterior al triángulo *CPS*.

Como $PS \parallel QR$ resulta que $QRB = 2\alpha$.

El triángulo *QBR* es isósceles de modo que $QBR = QRB = 2\alpha$.

Por otra parte *PQ* es paralela a *BC*, y resulta $APQ = PCS = \alpha$. Entonces en el triángulo isósceles *APQ*, $PAQ = 90^{\circ} - \frac{\alpha}{2}$.

La suma de los ángulos del triángulo *ABC* es

$$\alpha + 2\alpha + 90^{\circ} - \frac{\alpha}{2} = 180^{\circ},$$

$$\frac{5}{2}\alpha = 90^{\circ},$$

$$\alpha = 36^{\circ}.$$

Entonces $A = B = 72^{\circ}$ y $C = 36^{\circ}$.

E4

Sean $P_1, P_2, ..., P_{100}$ cien puntos del plano entre los que no hay tres alineados. Para cada tres puntos, diremos que el triángulo que determinan es *en el sentido del reloj* si el orden creciente de sus vértices es en el sentido del reloj.
¿Puede ocurrir que la cantidad de triángulos en el sentido del reloj sea exactamente 2017?

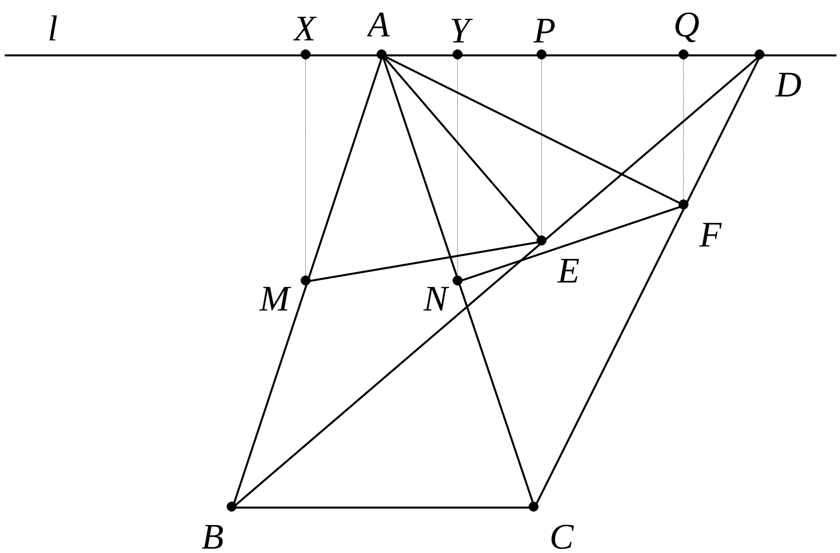
Solución

Veamos que es posible que la cantidad de triángulos en el sentido del reloj sea exactamente 2017. Supongamos que $P_1, P_2, ..., P_{100}$ están en una circunferencia en sentido antihorario. En este caso, la cantidad de triángulos en el sentido del reloj es cero. Ahora comenzamos a mover los puntos de a uno. Cuando un punto P_i cruza la recta P_jP_k resulta que el triángulo $P_iP_jP_k$ cambia su sentido horario. Si además este movimiento se hace de forma que P_i cruce una sola recta por vez (es decir, no pasa por ninguna intersección de dos o más rectas determinadas por los otros 99 puntos del conjunto), entonces en cada cruce exactamente un triángulo cambia su sentido horario y los demás permanecen como estaban. Así, la cantidad de triángulos en el sentido del reloj aumenta o disminuye de a 1 por vez.
Continuamos moviendo los puntos de esta manera hasta que pasen a ubicarse nuevamente sobre una circunferencia pero esta vez en sentido horario. En esta situación todos los triángulos son en el sentido del reloj. La cantidad de estos triángulos es $\binom{100}{3} = 161700 > 2017$. Como dijimos que los puntos se movían de forma tal que la cantidad de triángulos en el sentido del reloj cambia de a 1 por vez, en algún momento de este proceso habrá exactamente 2017 de tales triángulos. Esto completa la demostración.

E5

En el triángulo isósceles *ABC*, con $AB = AC$, sea *l* una recta paralela a *BC* trazada por *A*. Sea *D* un punto arbitrario de *l*. Sean *E*, *F* los pies de las perpendiculares a *BD*, *CD* trazadas por *A*, respectivamente. Si *P*, *Q* son los pies de las perpendiculares a *l* trazadas por *E*, *F*, demostrar que $AP + AQ \leq AB$.

Solución



Sin pérdida de generalidad, supongamos que $DC < DB$.

Sean M y N los puntos medios de AB y AC respectivamente. Tenemos que $AEB = AFC = 90^{\circ}$,

entonces, en los triángulos rectángulos AEB y AFC tenemos que $ME = \frac{AB}{2}$ y $NF = \frac{AC}{2}$ (por

propiedad de la mediana correspondiente a la hipotenusa).

Sean X e Y los pies de las perpendiculares desde M y N a la recta l respectivamente. Los triángulos AMX y ANY son iguales, por lo tanto $AX = AY$. Luego, como

$$AX + AP = XP \leq ME = \frac{AB}{2},$$

$$AQ - AY = YQ \leq NF = \frac{AC}{2},$$

sumando estas desigualdades resulta que

$$AP + AQ \leq \frac{AB}{2} + \frac{AC}{2} = AB,$$

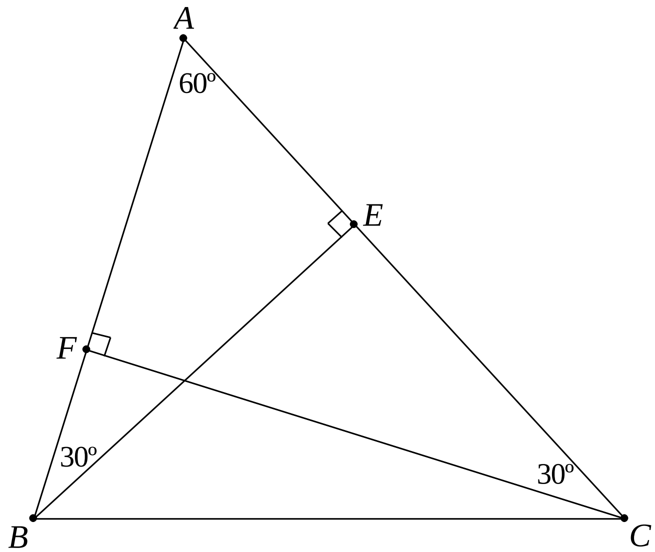
pues $AB = AC$.

M1

Sea ABC un triángulo acutángulo con $A = 60^{\circ}$. Sean E, F los pies de las alturas desde B, C respectivamente.

Demostrar que $CE - BF = \frac{3}{2}(AC - AB)$.

Solución



Como $BAC = 60^{\text{o}}$ tenemos que $ABE = ACF = 30^{\text{o}}$.

Luego los triángulos *ABE* y *ACF* son iguales a la mitad de un triángulo equilátero y

$$AE = \frac{1}{2}AB, \qquad AF = \frac{1}{2}AC.$$

Por lo tanto

$$CE - BF = \left(AC - AE\right) - \left(AB - AF\right)$$

$$= AC - \frac{1}{2}AB - AB + \frac{1}{2}AC$$

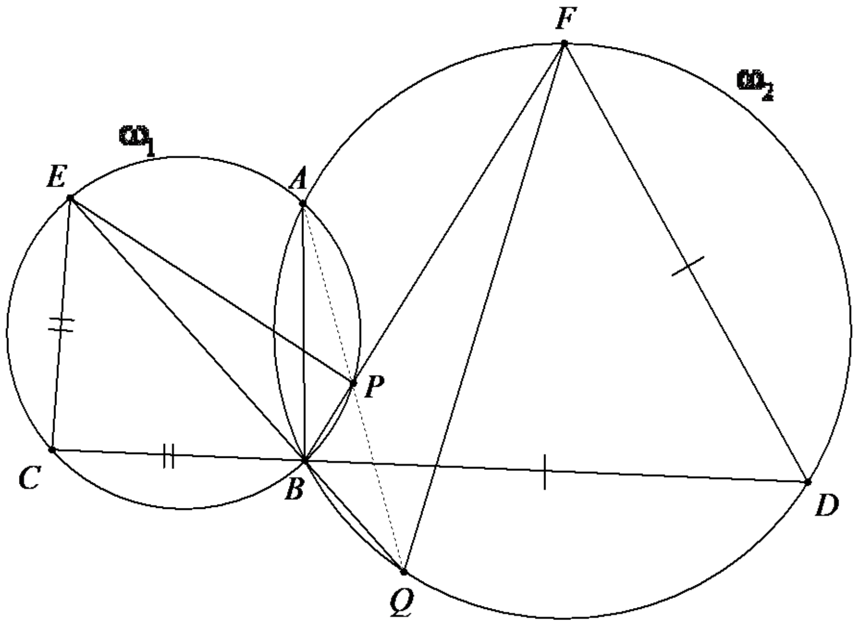
$$= \frac{3}{2}\left(AC - AB\right).$$

M2

Dos circunferencias ω_1, ω_2 se cortan en *A*, *B*. Una recta arbitraria trazada por *B* corta a ω_1, ω_2 en *C*, *D* respectivamente. Se eligen los puntos *E*, *F* en ω_1, ω_2 respectivamente de modo que $CE = CB$, $BD = DF$. Supongamos que *BF* corta a ω_1 en *P* y *BE* corta a ω_2 en *Q*.

Demostrar que *A*, *P*, *Q* están alineados.

Solución



Supongamos que los puntos están como en la figura, los otros casos son análogos.

Como $BD = DF$ y C, E, P, B están en ω_1 vale que

$$BFD = DBF = 180^{\circ} - CBP = CEP\,.$$

Entonces

$$CEB + BEP = BFQ + QFD\,.$$

Además $CEB = CBE = QBD = QFD$ pues *BCE* es un triángulo isósceles y *BQDF* es cíclico.

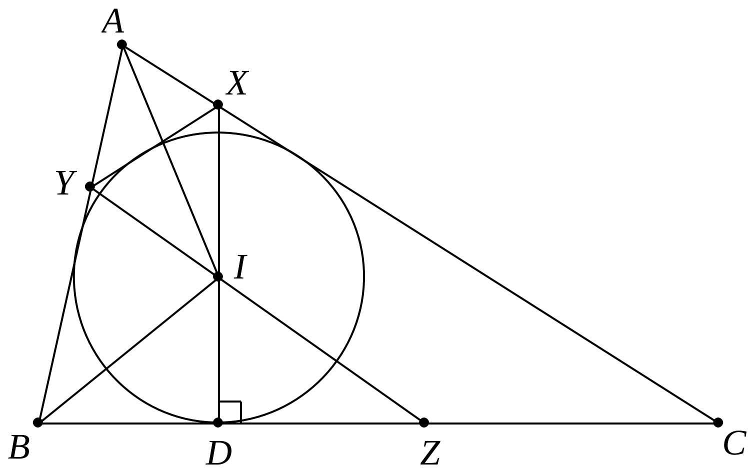
Se deduce que $BEP = BFQ$ y resulta $BAP = BEP = BFQ = BAQ$, por arco capaz en ω_1 y ω_2.

Por lo tanto, *A*, *P* y *Q* son colineales, como queríamos demostrar.

A1

En el triángulo *ABC* la circunferencia inscrita, de centro *I*, toca al lado *BC* en el punto *D*. La recta *DI* corta a *AC* en *X*. La recta tangente a la circunferencia inscrita, trazada por *X* (diferente de *AC*), corta a *AB* en *Y*. Si *YI* y *BC* se cortan en *Z*, demostrar que $AB = BZ$.

Solución



La circunferencia inscrita en el triángulo *ABC* es tangente a las rectas *AX*, *AY* y *XY*, entonces es la circunferencia exinscrita al triángulo *AXY* y su centro *I* es intersección de las bisectrices de BAC, BYX y CXY. Luego

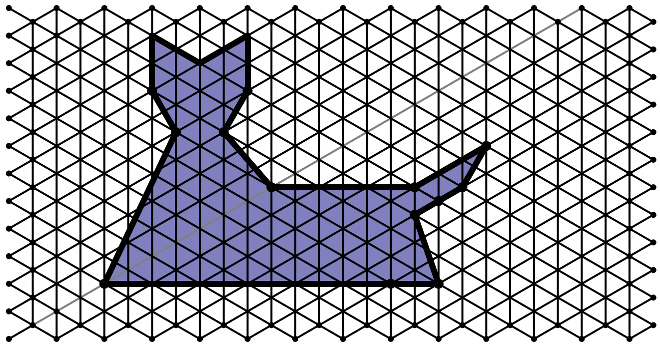
$$X\hat{I}Y = 180^{o} - \left(IYX + IXY\right) = 180^{o} - \frac{BYX + CXY}{2} =$$

$$= 180^{o} - \frac{360^{o} - \left(AYX + AXY\right)}{2} = 180^{o} - \frac{360^{o} - \left(180^{o} - A\right)}{2} = 90^{o} - \frac{A}{2}.$$

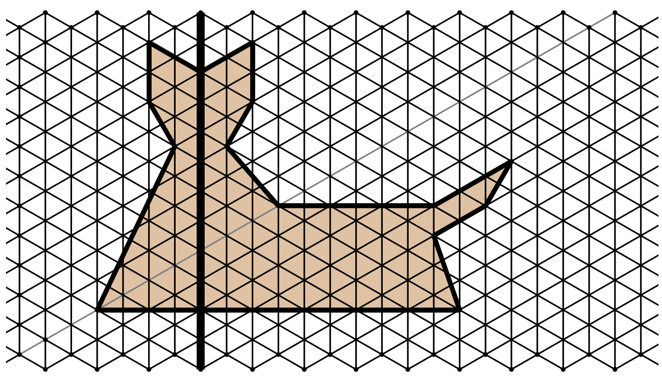
Por opuestos por el vértice, $D\hat{I}Z = 90^{o} - \frac{A}{2}$, luego $BZI = \frac{A}{2} = BAI$.

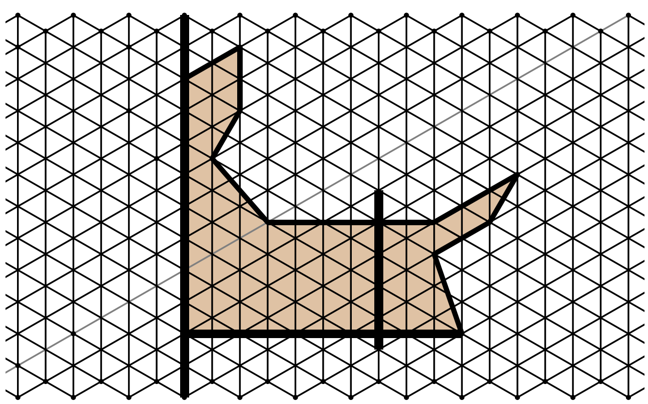
Además en los triángulos *ZBI* y *ABI* tenemos que $ZBI = ABI$, y comparten el lado *BI*. Por lo tanto son iguales y resulta *AB* = *BZ*, como queríamos demostrar.

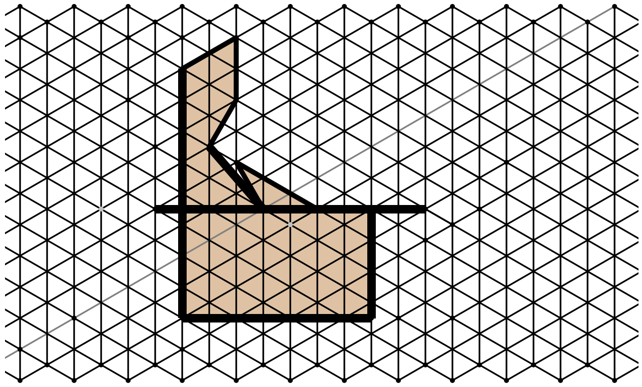
Soluciones IGO 2020
Nivel Elemental
Problema 1.
Llamaremos *doblar* un papel con forma de polígono a trazar un segmento en el papel y doblarlo a lo largo de dicho segmento. Se tiene un papel con la siguiente figura. Cortamos el papel siguiendo el borde de la región sombreada y obtenemos un papel con forma de polígono.
A partir de este polígono y haciendo a lo sumo 5 dobleces se fabrica un papel con forma de rectángulo. Tenés que describir tu solución, resaltando los segmentos que trazaste y dibujando el polígono que te queda después de cada doblez.
(No es necesario que los segmentos que hagas coincidan con líneas de la grilla.)

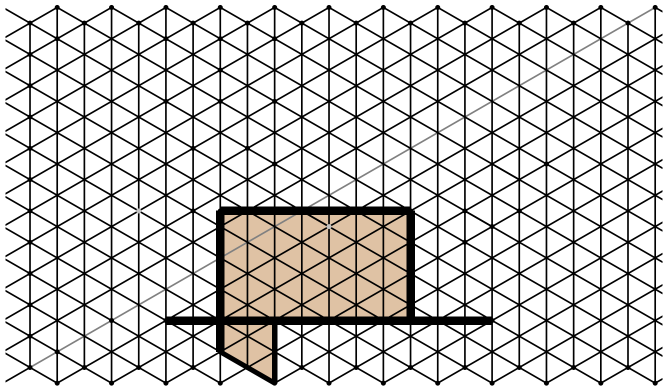


Solución.
Hacemos los siguientes dobleces:





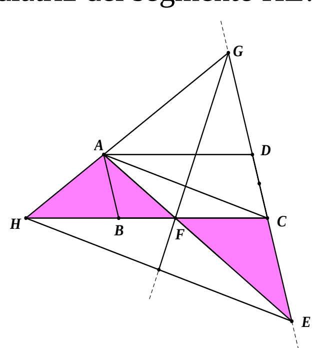




Estos dobleces se pueden desplazar milimétricamente, de modo que todos sean interiores al gato.

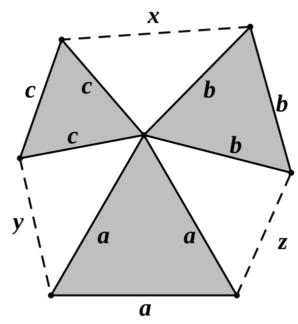
Problema 2. Sea *ABCD* un paralelogramo. Se eligen los puntos *E* y *G* en la recta *CD* de modo que *AC* sea la bisectriz del ángulo EAD y también sea la bisectriz del ángulo BAG. La recta *BC* corta a *AE* y *AG* en *F* y *H* respectivamente. Demostrar que la recta *FG* pasa por el punto medio de *HE*.

Solución. Como *AD* y *BC* son paralelos deducimos que $FCA = DAC = FAC$, de modo que $FA = FC$. De manera similar se demuestra que $GA = GC$. Luego los triángulos *GAF* y *GCF* tiene un lado común y los otros dos respectivamente iguales, por lo que son congruentes. De aquí resulta que $GAF = GCF$ lo que nos lleva a que $HAF = ECF$; además, por opuestos por el vértice, $AFH = CFE$. Entonces los triángulos *AFH* y *CFE* también son congruentes y obtenemos $FE = FH$. De modo similar, $GE = GH$. Luego ambos puntos, *F* y *G* pertenecen a la mediatriz del segmento *HE*, de donde resulta que *FG* es la mediatriz del segmento *HE*.



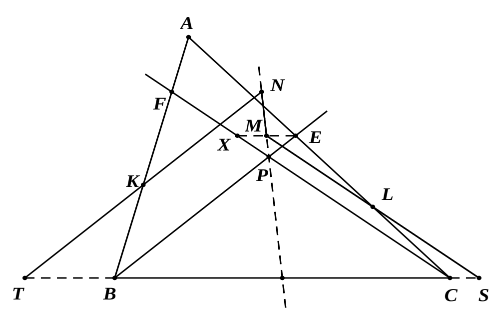
Problema 3. Se tienen tres triángulos equiláteros con las longitudes de sus lados iguales a *a*, *b* y *c* que tienen un vértice común y ningún otro punto en común, como se ve en la figura. En la figura también se definen las longitudes *x*, *y*, *z*. Demostrar que

$$3(x+y+z) > 2(a+b+c) \quad .$$



Solución. Consideramos los tres triángulos blancos de la figura; si rotamos cada triángulo 60º en sentido horario, cada lado coincide con un lado de otro triángulo. De modo que podemos rotar uno de ellos y pegarlo al siguiente, luego, al rotar la figura pegada se formará una línea quebrada entre dos puntos a distancia $2a$ con longitud $x + y + z$. Entonces $x+y+z>2a$, y sumando las tres posibles desigualdades obtenemos la desigualdad pedida.

Problema 4. Sea P un punto en el interior del triángulo ABC. Las rectas BP y CP cortan a AC y AB en E y F respectivamente. Sean K y L los puntos medios de los segmentos BF y CE respectivamente. Las rectas por L y K paralelas a CF y BE cortan a BC en S y T respectivamente. Sean M y N los simétricos de S y T con respecto a L y K respectivamente. Demostrar que al mover P en el interior del triángulo ABC, la recta MN pasa por un punto fijo.
Solución. Como las diagonales del cuadrilátero $EMCS$ se bisecan mutuamente, el cuadrilátero es un paralelogramo. Luego $EM \parallel BC$. Sea X la intersección de EM y CF. Notemos que $ML \parallel CX$ y L es el punto medio de CE, de modo que M también es el punto medio de EX. Como $EX \parallel BC$, por propiedad de las rectas paralelas hallamos que MP pasa por el punto medio de BC. De manera similar, NP pasa por el punto medio de BC¸ lo que concluye la demostración.



Problema 5. Decimos que dos vértices de un polígono simple son *visibles* entre si si son adyacentes o el segmento que los une está completamente contenido en el interior del polígono (excepto los extremos, que están en el borde del polígono). Hallar todos los enteros positivos n para los que existe un polígono simple de n lados en el que cada vértice es visible desde exactamente otros 4 vértices. (Un polígono simple es un polígono sin agujeros y que no se interseca a sí mismo.)
Solución. Primero probamos que no existe tal polígono si $n > 6$. Supongamos lo contrario y sean $A_1, A_2, ..., A_n$ sus vértices.
Lema 1. Supongamos que A_i es visible desde $A_{i-1}, A_j, A_k, A_{i+1}$ en sentido horario (notemos que el primero y el último vértice son vértices vecinos de A_i en el polígono). Entonces A_{i-1}, A_j son visibles entre si, A_j, A_k son visibles ente si y A_k, A_{i+1} son visibles entre si.
Demostración del lema. Basta considerar la triangulación de las tres partes del polígono separadas por A_iA_j y A_iA_k.
Lema 2. Con las notaciones del lema 1, A_jA_k es un lado del polígono.

Demostración del lema. Supongamos que A_iA_k es una diagonal interior. Por el lema 1, A_i puede ver a A_{j-1}. Pero A_jA_i y A_jA_k son diagonales interiores, de manera que A_jA_{i-1} es un lado. De manera similar obtenemos que solo hay un vértice entre A_iA_k y un vértice entre A_kA_i en el perímetro del polígono, lo que contradice que $n > 6$. Por lo tanto, A_jA_k es un lado del polígono y $k = j-1$.

Ahora, sea i tal que A_{i-1}, A_{i+1} son visibles entre si. Sabemos que existe un tal i, por ejemplo, podemos tomar un triángulo de la triangulación del polígono con sus tres vértices consecutivos en el polígono. Por el lema 2, A_{i-1} puede ver a A_{i+2}, A_{i+1} puede ver a A_{i-2} y A_{i-2} puede ver a A_{i+2}. De modo que encontramos los cuatro vértices visibles desde A_{i-1}, A_{i+1}. Si A_i puede ver a un vértice entonces éste es visible o bien desde A_{i-1} o bien desde A_{i+1} (por el lema 1). Luego A_i puede ver a A_{i-2}, A_{i+2}, lo que implica que $A_{i-2}A_{i+2}$ es un lado (por el lema 2).

Todo pentágono convexo es un ejemplo válido.

Solo queda estudiar el caso $n = 6$, lo que significa en el lema 2 que hay vértices A_i, A_j, A_k tales que A_iA_j, A_jA_k, A_kA_i son diagonales interiores. Digamos que estos vértices son A_2, A_4, A_6 del hexágono. Entonces A_3 no es visible desde A_6, lo que significa que uno de los ángulos A_2, A_4 es mayor que 180º. Pero entonces A_3 no puede ver o bien a A_1 o bien a A_5. Esto contradice el hecho que A_3 es visible desde 4 otros vértices. Por lo tanto, $n = 6$ tampoco es posible y el único valor posible es 5.

Nivel Medio

Problema 1. Sea $ABCD$ un trapecio con AB y CD sus lados paralelos. Sea M el punto medio del segmento AB. Existe un punto N del lado CD es tal que $ADN = \frac{1}{2} M NC$ y $BCN = \frac{1}{2} M ND$.

Demostrar que N es el punto medio del segmento CD.

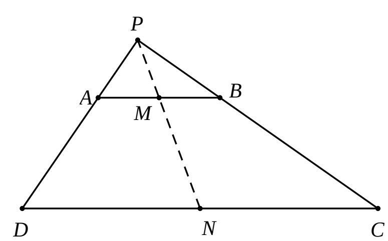
Solución. Tenemos que

$$\angle BCN + \angle ADN = \frac{1}{2}(\angle MND + \angle MNC) = 90^{\circ}.$$

Luego, AD y BC se cortan en un punto P tal que $\angle DPC = 90^{\circ}$. Como M es es el punto medio de AB,

$$\angle PMA = 2\angle PBA = 2\angle PCD = \angle MND.$$

Notemos que AB y CD son paralelas, luego PM y MN son paralelas y M, N y P pertenecen a una recta, de manera que N es el punto medio del segmento CD.



Problema 2. Sean ABC un triángulo isósceles ($AB = AC$) y O su circuncentro. Sean N el punto medio del segmento BC y M el simétrico de N con respecto al lado AC. Sea T un punto tal que $ANBT$ es un rectángulo. Demostrar que $OMT = \frac{1}{2} BAC$.

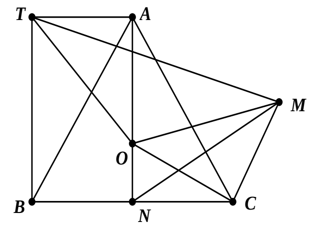
Solución. Como el triángulo ABC es isósceles, tenemos que $\angle ANC = 90^{\circ}$. Entonces

$\angle OCM = \angle OCA + \angle MCA = \angle OAC + \angle NCA = 90^{\circ} = \angle TAO$.

Además, $CM = CN = BN = AT$ y $OC = OA$; luego los triángulos OCM y OAT son congruentes, lo que nos lleva a $OT = OM$ y

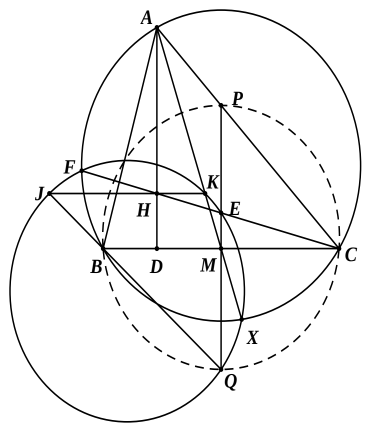
$$\angle AOT = \angle MOC \angle \Rightarrow \angle TOM = \angle AOC.$$

Entonces, AOC es semejante a MOT y $\angle OMT = \angle OAC = \frac{1}{2}\angle A$.



Problema 3. En el triángulo acutángulo ABC sea H el ortocentro y M el punto medio del segmento BC. La mediana AM corta a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC en X. La recta CH corta a la mediatriz de BC en E y también corta nuevamente a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC en F. El punto J pertenece a la circunferencia ω que pasa por X, E y F, y es tal que $BCHJ$ es un trapecio ($CB \| HJ$). Demostrar que JB y EM se cortan en un punto de ω.

Solución. Sean D el pie de altura trazada desde A y P, K las intersecciones de las rectas EM, AC con JH, AM respectivamente.



Por propiedades de las rectas paralelas tenemos:

$$\frac{ME}{EP} = \frac{DH}{HA} = \frac{MK}{KA} \Rightarrow EK \| AC. \qquad (1)$$

Notemos que $\angle XKE = \angle XAC = \angle XFE$. Luego K pertenece a ω. Sea Q el segundo punto de intersección de la recta EM con la circunferencia ω. Tenemos

$$\angle KJQ = \angle KEP = \angle EPC = \angle QPC \text{ (Por (1)).}$$

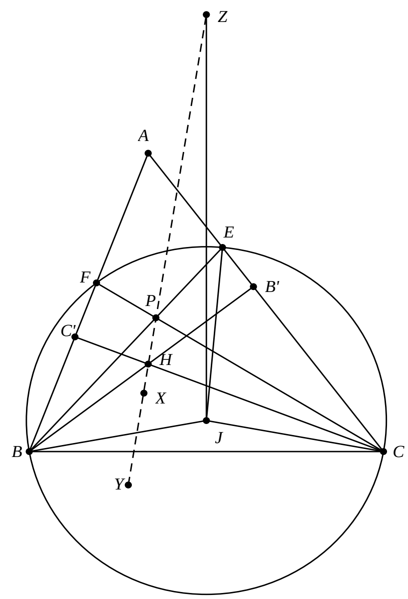
Ahora, es suficiente demostrar que $\angle KJC = \angle CBQ$ o demostrar que $CPBQ$ es un cuadrilátero cíclico. Esto último es equivalente a ver que $MP \cdot MQ = MB \cdot MC$. Además, si miramos las rectas paralelas podemos escribir $MA = \frac{MK \cdot MC}{ME}$. Utilizando esta ecuación y las propiedades de la potencia de un punto con respecto a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, tenemos

$$MB \cdot MC = MA \cdot MX = \frac{MK \cdot MX}{ME} \cdot MP = MQ \cdot MP.$$

(La última ecuación proviene de la potencia del punto M con respeto a la circunferencia ω. Con esto, hemos terminado.

Problema 4. Sea ABC un triángulo. Una circunferencia de centro J que pasa por B y C corta nuevamente a los lados AC y AB en E y F respectivamente. Sea X un punto tal que el triángulo FXB es semejante al triángulo EJC (en el mismo orden) y los puntos X y C están del mismo lado de la recta AB. Del mismo modo, sea Y un punto tal que el triángulo EYC es semejante al triángulo FJB (en

el mismo orden) y los puntos Y y B están del mismo lado de la recta AC. Demostrar que la recta XY pasa por el ortocentro del triángulo ABC.
Solución. Sean H el ortocentro del triángulo0 ABC, P la intersección de BE y CF. La recta PH corta a la mediatriz de BC en Z.



Tenemos

$$\angle HBP = \angle ABH - \angle ABP = 90^{\circ} - \angle BAC - \angle ABP = 90^{\circ} - 90^{\circ} - BEC = 90^{\circ} - JBC\,.$$

Entonces BH y BJ son rectas isogonales con respecto al ángulo $\angle PBC$. De modo similar, CH y CJ son rectas isogonales con respecto al ángulo $\angle PCB$. De lo anterior deducimos que H y J son conjugados isogonales con respecto al triángulo BPC. Luego $\angle HPB = \angle JPC$. Pero $ZB = ZC, JF = JE$ y los triángulos PFE y PBC son semejantes, por ende, las configuraciones del triángulo PFE más el punto J y el triángulo PBC más el punto Z son semejantes. De aquí sigue que los triángulos JEF y ZBC son semejantes.
Sean B' la intersección de BH y AC y C' la intersección de CH y AB. Tenemos

$$P^{H}_{(BE)} = HB \cdot HB' = HC \cdot HC' = P^{H}_{(CF)}\,.$$

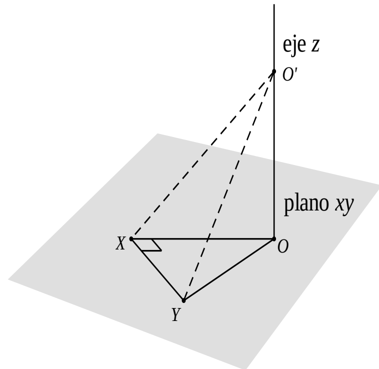
$$P^{P}_{(BE)} = PB \cdot PE = PC \cdot PF = P^{P}_{(CF)}\,.$$

Obtenemos entonces que Z pertenece a HP, que es el eje radical de la circunferencia de diámetros BE y CF. Análogamente, X, Y también pertenece a HP. Entonces XY pasa por el ortocentro del triángulo ABC.

Problema 5. Hallar todos los números $n \geq 4$ tales que existe un poliedro convexo de exactamente n caras en el que todas las caras son triángulos rectángulos.
(Notar que el ángulo formado entre dos caras adyacentes de un poliedro convexo es menor de 180º.)
Solución. Si para un cierto n existe un tal poliedro, entonces el número de lados de sus caras es por una parte igual a $3n$, y por otra, es dos veces el número de aristas. De modo que $3n$ es divisible por 2 y n debe ser par. Daremos un ejemplo de un tal poliedro para todo número par $n > 4$. Para ello necesitaremos el siguiente lema.
Lema 1. Sea O el origen del espacio tridimensional y supongamos que X, Y son dos puntos (distintos de O) del plano xy tales que $\angle OXY = 90^{\circ}$. Entonces, para todo punto O' del eje z el triángulo $O'XY$ es rectángulo (con $\angle O'XY = 90^{\circ}$).
Demostración. La demostración se basa en el teorema de Pitágoras. Si $O' = O$, no hay nada que probar. Si $O' \neq O$, la recta OO' (el eje z) es perpendicular al plano xy y, opr lo tanto, es perpendicular a toda recta de este plano que pase por O. En particular, los triángulos $O'OX$ y $O'OY$ son rectángulos. Por el teorema de Pitágoras en estos dos triángulos y en el triángulo OXY, tenemos

$$O'Y^2 = O'O^2 + OY^2 = O'O^2 + OX^2 + XY^2 = O'X^2 + XY^2\,,$$

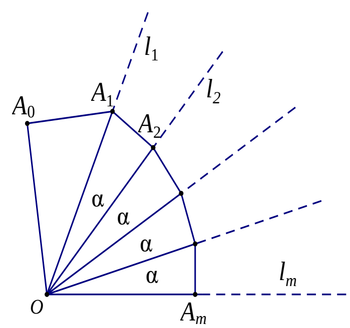
Lo que implica que $\angle O'XY = 90^\circ$.



Ahora volvemos al problema principal. Si $n = 4$, el tetraedro de vértices O', O, X, Y como en el lema, funciona (ver la figura anterior). De modo que podemos suponer que $n \geq 6$. Tomamos $m = \dfrac{n-2}{2} \geq 2$.

Primero construimos un polígono convexo de $m + 2$ lados $OA_0A_1...A_m$ en el plano xy (sea O el origen) e manera que

- $OA_0 = OA_m$.
- Todos los triángulos de la forma OA_iA_{i+1} (para $0 \leq i \leq m-1$) son rectángulos.



Consideramos m semirrectas distintas de origen O (las denotamos $l_1,...,l_m$ respectivamente, en sentido horario de modo que para un valor de α suficientemente pequeño,

$$\angle l_1Ol_2 = \angle l_2Ol_3 = ... = \angle l_{m-1}Ol_m = \alpha. \qquad (1)$$

Tomamos un punto arbitrario de la semirrecta l_1 y lo denotamos A_1. Comenzando en A_1 y dibujando inductivamente perpendiculares desde A_i a l_{i+1} definimos los puntos $A_2, A_3,..., A_m$ de manera que

$$\angle OA_2A_1 = \angle OA_3A_2 = ... = \angle OA_mA_{m-1} = 90^\circ. \qquad (2)$$

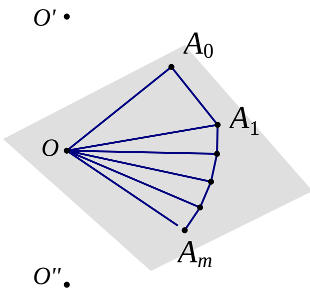
Por (1) y (2), todos los triángulos $OA_1A_2, OA_2A_3,..., OA_{m-1}A_m$ son semejantes.

Luego $\dfrac{OA_m}{OA_{m-1}} = ... = \dfrac{OA_3}{OA_2} = \dfrac{OA_2}{OA_1}$. Denotamos $r > 1$ a este valor común. Observamos que r puede ser arbitrariamente próximo a 1, tomando α suficientemente pequeño. Tenemos

$$OA_m = \frac{OA_m}{OA_{m-1}} \cdot ... \cdot \frac{OA_3}{OA_2} \cdot \frac{OA_2}{OA_1} \cdot OA_1 = r^m OA_1.$$

Como α es pequeño, todos los puntos $A_2, A_3,..., A_m$ están del mismo lado de la recta OA_1. Tomamos el punto A_0 del otro lado de esta recta de modo que $\angle OA_0A_1 = 90^\circ$ y $OA_0 = r^m \cdot OA_1$ (A_0 es uno de los puntos de intersección de la circunferencia de diámetro OA_1 y la circunferencia de centro O y radio $r^m \cdot OA_1$). Si r está suficientemente próximo a 1 (equivalentemente, α suficientemente próximo a 0), r^m estará cerca de 1 y podemos asegurar que $\angle A_0OA_1$ es pequeño, de modo que el polígono satisface todas las propiedades deseadas.

Una vez construido el polígono, consideramos dos puntos *O'*, *O''* del eje *z* (a lados diferentes del plano *xy*) con $OO' = OO'' = OA_0 = OA_m$. Entonces el poliedro de vértices $O', O'', A_0, \ldots, A_m$ (en realidad, la cápsula convexa de estos puntos) tiene exactamente $n = 2m + 2$ caras, y todos los triángulos son rectángulos. En efecto, tiene $2m$ caras de la forma $O'A_iA_{i+1}$ y $O''A_iA_{i+1}$ que son todos triángulos rectángulos, de acuerdo con el lema y dos caras, $O'A_0O''$ y $O'A_mO''$, que son triángulos isósceles y rectángulos.



$\Rightarrow$