Para:

OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA

SANTA FE 3312 9º PISO
(C1425BGV) BS. AS. - ARGENTINA
TEL/FAX 4826-6900 - http://www.oma.org.ar

CLAMI - UMA - FOMA

Buenos Aires, abril de 2022

Querido participante:

Por tu actuación en la Olimpíada del año pasado, te invitamos a participar en la 28° Olimpíada de Mayo que se realiza, como todos los años, en 16 países de América, en España y en Portugal.

Esta competencia es para jóvenes menores de 15 años y se toma en dos niveles: **primer nivel**, para los menores de 13 años, **segundo nivel**, para los chicos entre 13 y 15 años.

Las pruebas son difíciles, por eso sólo invitamos a los alumnos que llegaron al certamen nacional. Para que conozcas el grado de dificultad y te prepares para la competencia te enviamos los enunciados de las pruebas que se tomaron en 2018, 2019, 2020 y 2021 con sus soluciones.

Este año la prueba será el sábado 14 de mayo a las 10 horas (duración 3 horas, no puedes usar calculadora ni consultar libros ni apuntes). La prueba se toma en varios lugares del país, deberás inscribirte en el siguiente link seleccionando la sede donde concurrirás, en la localidad más cercana a tu casa.

https://forms.gle/ns3k8dv2t524aCxc7 **(cierre de inscripción 10 de mayo)**

Necesitas preinscribirte al mail de la sede donde concurrirás y como todo certamen internacional no tiene costo. No te olvides de llevar la autorización firmada por tus padres y sellada por tu escuela.

Te esperamos:

Patricia y Flora

Bs. As. - Bahía Blanca
Gustavo Paz
regionbahiablancaoma@gmail.com

Mendoza - Capital
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Padre Jorge Contreras 1300
Pque Gral San Martín
Juan Manuel Lopez
jnm.lopez@hotmail.com

Buenos Aires – Tandil
Mauro Nalale
omatandil@gmail.com

Buenos Aires - Necochea
Tomas Marti
omanecochea@gmail.com

Corrientes
Colegio Informático
Fray José de la Quintana N 947
María Piasentini
mariapiasentini@gmail.com

Río Negro - San Carlos de Bariloche
Universidad del Comahue
Quintral 1250, Barrio Jardín Botánico
Flavia Santamaria
olimpiadamatematicabariloche@gmail.com

Ciudad de Buenos Aires
UCEMA
Av. Córdoba 374
Ciudad Autónoma de Buenos Aires
Te: 011 4826 6900
veronica@oma.org.ar

Salta - Salta Capital
Colegio San Pablo
Av. Peron 440. Camino a San Lorenzo
Alberto Brizuela
brizuelafath@hotmail.com

Córdoba - Córdoba Capital
Colegio Nacional de Monserrat
Obispo Trejo 294
Maria Noel Gigena Basualdo
marianoelgigena@hotmail.com

Santa Cruz – Río Gallegos
Mónica Paulette
mpaulette@speedy.com.ar

Chubut - Comodoro Rivadavia
Universidad Nacional de la Patagonia
San Juan Bosco
Ciudad Universitaria - Km 4
María de Gracia Mendonca
mariadegraciam@gmail.com.ar

Santa Fe - Rosario
Colegio Superior de Comercio
Balcarce 1240
Luciano Abba
olimpiadarosario@gmail.com

Santa Fe - Capital
Escuela Mariano Moreno
Ituzaingó 1814
celular 0342-5304445
Cristina Paez
olimpaez@hotmail.com

Tucumán - S. M. de Tucumán
Colegio Sagrado Corazón
25 de Mayo 680
Claudia Moreno
claumore919@gmail.com

Lugar a confirmar: Se pondrá la información en nuestra página web: http://www.oma.org.ar/internacional/may.htm

XXIV^{a} OLIMPÍADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2018

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 27 de mayo.

PROBLEMA 1
Juan hace una lista de 2018 números. El primero es el 1. Luego, cada número se obtiene de sumarle al anterior alguno de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9.
Sabiendo que ninguno de los números de la lista termina en 0, ¿cuál es el mayor valor que puede tener el último número de la lista?

PROBLEMA 2
Se efectúan mil divisiones enteras: se divide 2018 entre cada uno de los números enteros del 1 al 1000. Se obtienen así mil cocientes enteros con sus respectivos restos. ¿Cuál de estos mil restos es el mayor?

PROBLEMA 3
Sea $ABCDEFGHIJ$ un polígono regular de 10 lados que tiene todos sus vértices en una circunferencia de centro O y radio 5. Las diagonales AD y BE se cortan en P y las diagonales AH y BI se cortan en Q. Calcular la medida del segmento PQ.

PROBLEMA 4
Ana debe escribir 7 enteros positivos, no necesariamente distintos, alrededor de una circunferencia de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

- La suma de los siete números es igual a 36.
- Si dos números son vecinos la diferencia entre el mayor y el menor es igual a 2 o 3.

Hallar el máximo valor del mayor de los números que puede escribir Ana.

PROBLEMA 5
En cada casilla de un tablero de 5×5 se escribe uno de los números 2, 3, 4 o 5 de manera que la suma de todos los números en cada fila, en cada columna y en cada diagonal siempre sea par. ¿De cuántas formas podemos llenar el tablero?
Aclaración. Un tablero de 5×5 tiene exactamente 18 diagonales de diferentes tamaños. En particular, las esquinas son diagonales de tamaño 1.

XXIV^{a} OLIMPÍADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2018

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 27 de mayo.

PROBLEMA 1
Se tiene un número entero de 4 dígitos que es un cuadrado perfecto. Se construye otro número sumándole 1 al dígito de las unidades, restándole 1 al dígito de las decenas, sumándole 1 al dígito de las centenas y restándole 1 al dígito de las unidades de mil. Si el número que se obtiene es también un cuadrado perfecto, hallar el número original. ¿Es único?

PROBLEMA 2
En un tablero de 4×4 están escritos los números del 1 al 16, uno en cada casilla. Andrés y Pablo eligen cuatro números cada uno. Andrés elige el mayor de cada fila y Pablo, el mayor de cada columna. Un mismo número puede ser elegido por ambos. Luego, se eliminan del tablero todos los números elegidos. ¿Cuál es el mayor valor que puede tener la suma de los números que quedan en el tablero?

PROBLEMA 3
Los 2018 residentes de un pueblo están estrictamente divididos en dos clases: caballeros, que siempre dicen la verdad, y mentirosos, que siempre mienten. Cierto día todos los residentes se acomodaron alrededor de una circunferencia y cada uno de ellos anunció en voz alta "*Mis dos vecinos, el de la izquierda y el de la derecha, son mentirosos*". A continuación uno de los residentes abandonó el pueblo. Los 2017 que quedaron se acomodaron nuevamente en una circunferencia (no necesariamente en el mismo orden que antes) y cada uno de ellos anunció en voz alta "*Ninguno de mis vecinos, el de la izquierda y el de la derecha, es de mi misma clase*". Determinar, si es posible, de qué clase es el residente que abandonó el pueblo, caballero o mentiroso.

PROBLEMA 4
En un paralelogramo $ABCD$, sea M el punto del lado BC tal que $MC = 2BM$ y sea N el punto del lado CD tal que $NC = 2DN$. Si la distancia del punto B a la recta AM es 3, calcular la distancia del punto N a la recta AM.

PROBLEMA 5
Cada punto de una circunferencia está coloreado con uno de 10 colores. ¿Es cierto que para cualquier coloración hay 4 puntos del mismo color que son vértices de un cuadrilátero con dos lados paralelos (un trapecio isósceles o un rectángulo)?

XXV^a OLIMPÍADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2019

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo.

PROBLEMA 1

Hallar todos los números de dos dígitos $\overline{ab}$ que elevados al cuadrado dan un resultado donde los dos últimos dígitos son $\overline{ab}$.

PROBLEMA 2

En un torneo de ajedrez participaron más de cinco competidores. Cada competidor jugó exactamente una vez contra cada uno de los otros competidores. Cinco de los competidores perdieron cada uno exactamente dos juegos. Todos los demás competidores ganaron, cada uno, exactamente tres juegos. No hubo empates en el torneo. Determinar cuántos competidores hubo y mostrar un torneo que verifique todas las condiciones.

PROBLEMA 3

Gus tiene que hacer una lista de 250 números enteros positivos, no necesariamente distintos, tal que cada número sea igual a la cantidad de números de la lista que son distintos de él. Por ejemplo, si 15 es un número de la lista entonces la lista contiene 15 números distintos de 15. Determinar la máxima cantidad de números distintos que puede contener la lista de Gus.

PROBLEMA 4

Hay que dividir un papel cuadrado en tres partes, mediante dos cortes rectos, de modo que al ubicar estas partes de forma adecuada, sin huecos ni superposiciones, se forme un triángulo obtusángulo. Indicar cómo cortar el cuadrado y cómo armar el triángulo con las tres partes.
Nota. Un triángulo es obtusángulo si uno de sus ángulos mide más de 90º.

PROBLEMA 5

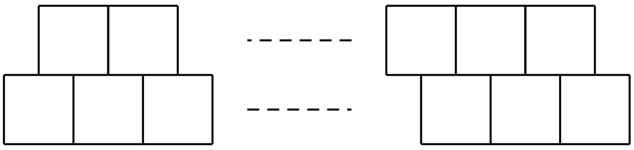
Se tiene un tablero de tres filas y 2019 columnas. En la primera fila están escritos los números enteros de 1 a 2019 inclusive, ordenados de menor a mayor. En la segunda fila, Ana escribe esos mismos números pero ordenados a su elección. En cada casilla de la tercera fila se escribe la diferencia entre los dos números ya escritos en su misma columna (el mayor menos el menor). Beto tiene que pintar algunos números de la tercera fila de manera que la suma de los números pintados sea igual a la suma de los números de esa fila que quedaron sin pintar. ¿Puede Ana completar la segunda fila de manera que Beto no logre su objetivo?

XXV^a OLIMPÍADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2019

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
<u>Justifica cada una de tus respuestas.</u>
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo.

PROBLEMA 1
Un entero positivo es *piola* si los 9 restos que se obtienen al dividirlo entre 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 son todos diferentes y distintos de cero. ¿Cuántos enteros piolas hay entre 1 y 100000?

PROBLEMA 2
Se tiene un tablero con 2020 casillas en la fila inferior y 2019 en la superior, ubicadas como se muestra en la figura.



En la fila inferior se colocan los números enteros del 1 al 2020 en algún orden. Luego en cada casilla de la fila superior se anota la multiplicación de los dos números que tiene debajo. ¿Cómo se pueden colocar los números en la fila inferior para que la suma de los números de la fila superior sea la menor posible?

PROBLEMA 3
En los lados *AB*, *BC* y *CA* de un triángulo *ABC* se ubican los puntos *P*, *Q* y *R* respectivamente, tales que $BQ = 2QC$, $CR = 2RA$ y $PRQ = 90^{o}$. Demostrar que $APR = RPQ$.

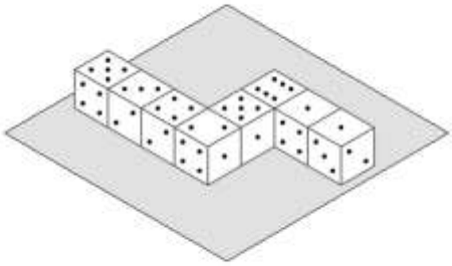
PROBLEMA 4
Encontrar el menor número entero positivo *N* de dos o más dígitos que tiene la siguiente propiedad: Si insertamos cualquier dígito no nulo *d* entre cualesquiera dos dígitos adyacentes de *N* obtenemos un número que es múltiplo de *d*.

PROBLEMA 5
Consideramos los *n* vértices de un polígono regular de *n* lados. Se tiene un conjunto de triángulos con vértices en estos *n* puntos con la propiedad que para cada triángulo del conjunto, al menos uno de sus lados no es lado de ningún otro triángulo del conjunto. ¿Cuál es la mayor cantidad de triángulos que puede tener el conjunto?

XXVIª OLIMPÍADA de MAYO
Primer Nivel
Octubre de 2020

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
<u>Justifica cada una de tus respuestas.</u>
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 7 de noviembre.

PROBLEMA 1



Sofía ubica los dados sobre una mesa como se muestra en la figura, juntando caras que tienen el mismo número en cada dado. Ella da vueltas alrededor de la mesa sin tocar los dados. ¿Cuál es la suma de los números de todas las caras que no puede ver?
Nota. En todo dado los números de las caras opuestas suman 7.

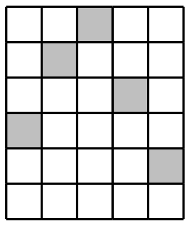
PROBLEMA 2

Pablo escribió la lista de todos los números de cuatro cifras tales que el dígito de las centenas es 5 y el dígito de las decenas es 7. Por ejemplo, 1**57**3 y 7**57**0 están en la lista de Pablo, pero 2754 y 571 no. Calcular la suma de todos los números de la lista de Pablo.
Nota. Los números de la lista de Pablo no pueden empezar con cero.

PROBLEMA 3

Una hormiga despistada hace el siguiente recorrido: comenzando en el punto *A* va 1 cm al norte, después 2 cm al este, a continuación 3 cm al sur, luego 4 cm al oeste, de inmediato 5 cm al norte, continúa 6 cm al este, y así sucesivamente, finalmente 41 cm al norte y termina en el punto *B*. Calcular la distancia entre *A* y *B* (en línea recta).

PROBLEMA 4



María tiene un tablero de 6×5 con algunas casillas sombreadas, como en la figura. Ella escribe, en algún orden, los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 en la primera fila y luego completa el tablero de la siguiente manera: mira el número escrito en la casilla sombreada y escribe el número que ocupa la posición indicada por la casilla sombreada como último número de la fila siguiente, y repite los demás números en las primeras cuatro casillas, siguiendo el mismo orden que tenían en la fila anterior.
Por ejemplo, si escribió 2 3 4 1 5 en la primera fila, entonces como en la casilla sombreada está el 4, el número que ocupa el cuarto lugar (el 1) lo escribe en la última casilla de la segunda fila y la completa con los restantes números en el orden en que estaban. Queda: 2 3 4 5 1.
Luego, para completar la tercera fila, como en la casilla sombreada está el 3, el número ubicado en el tercer lugar (el 4) lo escribe en la última casilla y obtiene 2 3 5 1 4.
Siguiendo de la misma manera obtiene el tablero de la figura.

2	3	**4**	1	5
2	**3**	4	5	1
2	3	5	**1**	4
3	5	1	4	2
3	5	4	2	**1**
5	4	2	1	3

Mostrar una manera de ubicar los números en la primera fila para obtener en la última fila los números 2 4 5 1 3.

PROBLEMA 5

Sobre una mesa hay varias cartas, algunas boca arriba y otras boca abajo. La operación permitida es elegir 4 cartas y darlas vuelta. El objetivo es obtener todas las cartas en el mismo estado (todas boca arriba o todas boca abajo). Determinar si es posible lograr el objetivo mediante una secuencia de operaciones permitidas si inicialmente hay:

a) 101 cartas boca arriba y 102 boca abajo;
b) 101 cartas boca arriba y 101 boca abajo.

XXVI^{a} OLIMPÍADA de MAYO
Segundo Nivel
Octubre de 2020

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
<u>Justifica cada una de tus respuestas.</u>
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 7 de noviembre.

PROBLEMA 1
Decimos que un número entero positivo es *súper-impar* si todos sus dígitos son impares. Por ejemplo, 1737 es súper-impar y 3051 no lo es. Hallar un entero positivo par que **no** se pueda expresar como suma de dos números súper-impares y explicar por qué no es posible expresarlo de esa manera.

PROBLEMA 2
a) Determinar si existen enteros positivos a, b y c, no necesariamente distintos, tales que $a+b+c=2020$ y $2^a+2^b+2^c$ es un cuadrado perfecto.
b) Determinar si existen enteros positivos a, b y c, no necesariamente distintos, tales que $a+b+c=2020$ y $3^a+3^b+3^c$ es un cuadrado perfecto.

PROBLEMA 3
Se tiene una caja con 2020 piedras. Ana y Beto juegan a retirar piedras de la caja, alternadamente y comenzando por Ana. Cada jugador en su turno debe retirar un número positivo de piedras que sea capicúa. El que logre dejar la caja vacía gana. Determinar cuál de los dos tiene una estrategia ganadora, y explicar cuál es esa estrategia.
Nota. Un entero positivo es capicúa si se lee igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha. Por ejemplo 3, 22, 484 y 2002 son capicúas.

PROBLEMA 4
Sean ABC un triángulo rectángulo, recto en B, y M el punto medio del lado BC. Sea P el punto en la bisectriz del ángulo BAC tal que PM es perpendicular a BC (P está fuera del triángulo ABC). Determinar el área del triángulo ABC si $PM = 1$ y $MC = 5$.

PROBLEMA 5
Decimos que un entero positivo n es *circular* si es posible colocar los números $1, 2, \ldots, n$ alrededor de una circunferencia de tal manera que no haya tres números adyacentes cuya suma sea múltiplo de 3.
a) Demostrar que 9 no es circular.
b) Demostrar que todo entero mayor que 9 es circular.

XXVII^a OLIMPÍADA de MAYO

Primer Nivel

Mayo de 2021

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 30 de mayo.

PROBLEMA 1

En un bosque hay 5 árboles A, B, C, D, E que se encuentran en ese orden sobre una línea recta. En el punto medio de AB hay una margarita, en el punto medio de BC hay un rosal, en el punto medio de CD hay un jazmín y en el punto medio de DE hay un clavel. La distancia entre A y E es de 28 m; la distancia entre la margarita y el clavel es de 20 m. Calcular la distancia entre el rosal y el jazmín.

PROBLEMA 2

En un tablero cuadriculado de 2×8 se desea colorear cada casilla de rojo o azul de modo tal que en cada subtablero de 2×2 haya al menos 3 casillas pintadas de azul. ¿De cuántas maneras se puede realizar esta coloración?

Nota. Un subtablero de 2×2 es un cuadrado formado por cuatro casillas que tienen un vértice común.

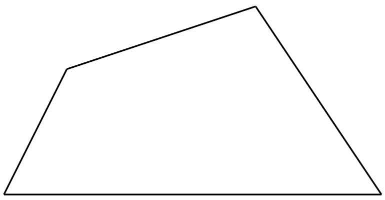
PROBLEMA 3

En un año que tiene 365 días, ¿cuál es la máxima cantidad de "martes 13" que puede haber?

Nota. Los meses de abril, junio, septiembre y noviembre tienen 30 días cada uno; febrero tiene 28 y todos los demás tienen 31 días.

PROBLEMA 4

A Facundo y Luca les han regalado un pastel que tiene la forma del cuadrilátero de la figura.



Van a hacer dos cortes rectos sobre el pastel obteniendo así 4 porciones con forma de cuadrilátero. Luego Facundo se quedará con dos porciones que no compartan ningún lado; las otras dos serán para Luca. Indicar cómo pueden hacer los cortes para que ambos niños reciban la misma cantidad de pastel. Justificar por qué cortando de esa manera se logra el objetivo.

PROBLEMA 5

Beto escribió 36 enteros positivos consecutivos en el pizarrón. Calculó la suma de todos los dígitos de los 16 números más pequeños y escribió el resultado en color azul. Luego calculó la suma de todos los dígitos de los 10 números más grandes y escribió el resultado en color rojo. ¿Es posible que el número azul sea menor o igual que el número rojo? Si la respuesta es sí, mostrar cuáles pueden ser los números que escribió Beto; si la respuesta es no, explicar por qué es imposible.

XXVII^{a} OLIMPÍADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2021

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 30 de mayo.

PROBLEMA 1
En el pizarrón están escritos los 99 números 1, 2, 3, …, 98, 99. Hay que pintar 50 de ellos de manera tal que la suma de dos números pintados nunca sea igual a 99 ni a 100. ¿De cuántas maneras se puede hacer?

PROBLEMA 2
Sea N un entero positivo. Un divisor de N es *propio* si es mayor que 1 y menor que N. Por ejemplo,
2, 3, 6 y 9 son todos los divisores propios de 18.
Un entero positivo es *especial* si tiene al menos dos divisores propios y es múltiplo de todas las posibles diferencias entre dos de ellos. Determinar todos los enteros positivos que son especiales.

PROBLEMA 3
Sean ABC un triángulo y D un punto en su interior tal que $DBC = 60^{o}$ y $DCB = DAB = 30^{o}$.
Si M y N son los puntos medios de AC y BC, respectivamente, demostrar que $DMN = 90^{o}$.

PROBLEMA 4
En cada vértice de un polígono de 13 lados escribimos uno de los números 1, 2, 3, …, 12, 13, sin repetir. Luego, en cada lado del polígono escribimos la diferencia de los números de los vértices de sus extremos (el mayor menos el menor). Por ejemplo, si dos vértices consecutivos del polígono tienen los números 2 y 11, en el lado que determinan se escribe el número 9.
a) ¿Es posible numerar los vértices del polígono de modo que en los lados sólo se escriban los números 3, 4 y 5?
b) ¿Es posible numerar los vértices del polígono de modo que en los lados sólo se escriban los números 3, 4 y 6?

PROBLEMA 5
Demostrar que existen 100 enteros positivos distintos $n_1, n_2, ..., n_{100}$ tales que $\dfrac{n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 + ... + n_{100}^3}{100}$ es un cubo perfecto.

Soluciones Olimpiada de Mayo. 2018

Primer Nivel

Problema 1

Solución. Llamamos *movida* a la operación de sumar un dígito al último número de la lista. Debemos aplicarle a 1 una sucesión de 2017 movidas. Sea *N* un número natural que no termina en 0. Observamos que al sumar 9 al número *N* su último dígito disminuye en 1. Sigue que no podemos aplicar 9 veces la movida de sumar 9 comenzando con *N* (o en otro caso una de las movidas nos lleva a 0 como último dígito). Entonces si se aplican 9 movidas consecutivas a *N*, al menos una de ellas debe sumar un número menor que 9, lo que significa que el incremento debido a esas 9 movidas es a lo sumo $8\cdot 9+8=80$. Consideramos las $2016=224\cdot 9$ movidas luego de la primera. Se pueden dividir en 224 grupos, que son cada uno de 9 movidas consecutivas, entonces el incremento total que producen es menor o igual que $224\cdot 80=17920$. La primera movida transforma al número inicial 1 en a lo sumo 9 (sumando 8) pues si sumáramos 9 obtendríamos 10, lo que está prohibido. Luego el resultado al cabo de 2017 movidas es a lo sumo 17929. Recíprocamente, se puede obtener 17929 con 2017 movidas. La construcción está sugerida por el razonamiento anterior. La primera movida es 8, que coloca a 9 como último dígito. Las siguientes 8 movidas son 9, hasta que el último dígito sea 1, seguido de una movida 8 que, de nuevo, coloca el último dígito en 9. Las 9 movidas descriptas dan un incremento de 80, de modo que el número resultante es $9+80$. Aplicamos la misma tira de 9 movidas consecutivas 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8 otras 223 veces. Todas las movidas son legítimas y el resultado final es $9+224\cdot 80=17929$.

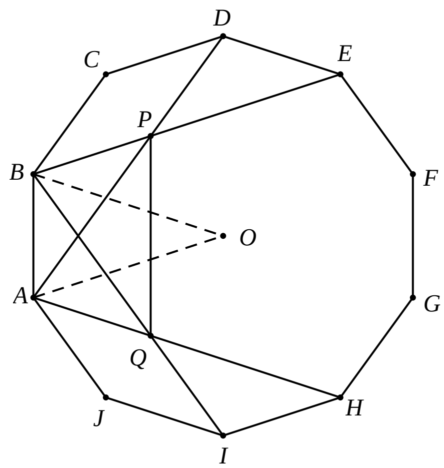
Problema 2

Solución. Si se divide 2018 entre 673 se obtiene como resto 672 ($2018=673\cdot 2+672$). Afirmamos que 672 es el mayor de los restos. En efecto, si se divide 2018 entre un entero *d* con $1\le d\le 672$ entonces el resto será a lo sumo $d-1\le 671$. Y si se divide 2018 entre un entero *d* con $674\le d\le 1000$ entonces el cociente será 2 (pues $2<\frac{2018}{1000}<\frac{2018}{674}<3$) y el resto será $2018-2d\le 2018-2\cdot 674=670<672$).

Problema 3

Solución. Sabemos que los ángulos interiores del decágono miden 144° y los ángulos centrales 36º, luego $AOB=36°$. El triángulo *AOB* es isósceles de base *AB*. Sus ángulos iguales miden

$$OAB=OBA=\frac{180^{\circ}-36^{\circ}}{2}=72^{\circ}.$$



Los trapecios *ABCD*, *BCDE*, *IJAB*, *HIJA* son congruentes pues todos se forman con tres lados consecutivos del decágono y una diagonal que los abarca. Calculemos los ángulos de estos trapecios. Como $ABC=BCD=144^{\circ}$ tenemos $BAD=CDA=\frac{360^{\circ}-2\cdot 144^{\circ}}{2}=36^{\circ}$. Es claro que lo mismo ocurre en los otros tres trapecios, tienen dos ángulos de 36º y dos ángulos de 144º.

En el triángulo *ABP*, $BAP=36^{\circ}$ y $ABP=144^{\circ}-36^{\circ}=108^{\circ}$, luego $BPA=180^{\circ}-36^{\circ}-108^{\circ}=36^{\circ}$. Entonces el triángulo *ABP* es isósceles con $BP=AB$. Del mismo modo se prueba que el triángulo *QAB* es isósceles.

Ahora, el cuadrilátero *PBAQ* es un trapecio isósceles, de modo que $AB\,||\,PQ$.

En el triángulo *BQP*, $BQP=AQP-AQB=\frac{360^{\circ}-2\cdot 108^{\circ}}{2}-36^{\circ}=36^{\circ}$, $QBP=108^{\circ}-36^{\circ}=72^{\circ}$ y $BPQ=180^{\circ}-36^{\circ}-72^{\circ}=72^{\circ}$. Luego este triángulo es isósceles de base *BP*, así que tiene sus ángulos y su base iguales a los del triángulo *AOB*. Entonces *BQP* es congruente a *AOB* y $PQ = AO = 5$.

Problema 4

Solución. El máximo es 9. Denotamos a los números *c*, *b*, *a*, *M*, *x*, *y*, *z* recorridos en el sentido de las agujas del reloj, con *M* el mayor de los siete. En busca de una contradicción, supongamos que $M \geq 10$. Como la diferencia entre números adyacentes es 2 o 3 tenemos $a \geq 7, b \geq 4, c \geq 1$ y por ende $a+b+c \geq 7+4+1=12$. Luego $x+y+z \leq 36-M-12 \leq 14$. Por simetría también valen las desigualdades $x+y+z \geq 12$ y $a+b+c \leq 14$.

Si $a \geq 8$ entonces $b \geq 5, c \geq 2$ y $a+b+c > 14$. Luego $a \leq 7$ y $M \geq 10$ implica $a = 7$. De modo análogo $x = 7$ y las desigualdades de arriba nos dan $5 \leq b+c \leq 7$, $5 \leq y+z \leq 7$.

Consideramos $5 \leq b+c \leq 7$. Tenemos que $b < 7$, $c < 7$, luego $b = a-3 = 4$ o $b = a-2 = 5$. Si $b = 4$ entonces $1 \leq c \leq 3$. Como *b* y *c* difieren en 2 o 3 sigue que $c \in \{1,2\}$. Y si $b = 5$ entonces $c \in \{1,2\}$ (de hecho $c = 2$ es la única opción). En los dos casos posibles hemos obtenido $c \in \{1,2\}$. Un argumento simétrico basado en $5 \leq y+z \leq 7$ conduce a $z \in \{1,2\}$. Sin embargo entonces los números adyacentes *c* y *z* difieren en 0 o 1, lo que es imposible. Un ejemplo con $M = 9$: $1, 4, 7, 9, 7, 5, 3$.

Problema 5

Solución. Primero vamos a considerar la paridad de los números que irán en las 25 casillas, para esto, colocamos en cada casilla del tablero un 0 o un 1, donde el 0 indicará que en esa casilla hay un número par y el 1 indicará que en esa casilla hay un número impar. Ahora, vamos a determinar el número de formas de colocar un 0 o un 1 en cada casilla de tal manera que la suma de todos los números en cada fila, en cada columna y en cada una de las diagonales de cualquier tamaño siempre sea par. Es claro que en las cuatro esquinas debe ir un 0, pues según el problema, la suma de todos los números en cada diagonal de cualquier tamaño es par, y las esquinas son diagonales de tamaño 1. Notemos que si colocamos números cualesquiera (0 o 1) en las casillas *x*, *y*, *z*, *w* de la Figura 1, el resto del tablero se puede llenar de manera única (ver Figura 2), donde las operaciones están definidas en módulo 2.

0			y	0
x				
				z
0	w			0

Figura 1

$\Rightarrow$

0	x	$x+y$	y	0
x	$y+w$	$z+w$	$x+z$	y
$w+x$	$y+z$	0	$x+w$	$y+z$
w	$x+z$	$x+y$	$y+w$	z
0	w	$z+w$	z	0

Figura 2

Además, para cualesquiera *x*, *y*, *z*, *w* la distribución de números de la figura 2 cumple las condiciones del problema.

Como hay $2^4 = 16$ ternas (*x*, *y*, *z*, *w*) concluimos que el tablero de 5 × 5 se puede llenar de 16 formas con ceros y unos. Ahora, para llenar las casillas con los números 2, 3, 4, 5 cumpliendo lo pedido haremos lo siguiente: en cada casilla que tiene escrito un 0, borramos el 0 y escribimos 2 o 4; y en cada casilla que tiene escrito un 1, borramos el 1 y escribimos 3 o 5. En síntesis, cada una de las 25 casilla se puede llenar de dos formas. Por lo tanto, el tablero de 5 × 5 se puede llenar con los números 2, 3, 4, 5 de 16 × 2^{25} = 2^{29} formas.

Segundo Nivel

Problema 1

Solución. Sean m^2 y n^2 los dos números, entonces

$$m^2 - n^2 = (a10^3 + b10^2 + c10 + d) - ((a-1)10^3 + (b+1)10^2 + (c-1)10 + (d+1)) =$$
$$= 10^3 - 10^2 + 10 - 1 = 909 = 3^2 \cdot 101 .$$

Luego $m^2 - n^2 = (m-n)(m+n) = 3^2 \cdot 101$.

Hay 3 casos

$$\begin{cases} m-n=1 \\ m+n=909 \end{cases};\ \begin{cases} m-n=3 \\ m+n=303 \end{cases};\ \begin{cases} m-n=9 \\ m+n=101 \end{cases}$$

pero en los dos primeros m^2 y n^2 tienen más de 4 dígitos (en el primero, $m = 455$ y en el segundo, $m = 153$). En el tercer caso tenemos que

$$2m = 110 \Rightarrow m = 55 \text{ y } n = 46 .$$

Así $m^2 = 3025$ y $n^2 = 2116$.

Son los únicos que satisfacen las condiciones.

Problema 2

Solución. Sean $a>b>c>d$ los cuatro mayores números elegidos. Claramente $a = 16$. Además, existe una fila o columna que contiene al 15 y no contiene al 16, entonces $b = 15$.

Hay a lo más 4 números que cumplen lo siguiente: La fila que lo contiene tiene un elemento del conjunto {15, 16} y la columna que lo contiene también.

16	×
×	15

Luego, c es el mayor de los al menos 12 números restantes, entonces $c \geq 12$.

Hay a lo más 9 números que cumplen lo siguiente: La fila que lo contiene tiene un elemento del conjunto {c, 15, 16} y la columna que lo contiene también.

16	×	×
×	15	×
×	×	c

Luego, d es el mayor de los al menos 7 números restantes, entonces $d \geq 7$.

Sabemos que al menos cuatro números van a ser eliminados, entonces la suma de los números borrados es al menos $a + b + c + d \geq 16 + 15 + 12 + 7 = 50$, por lo cual, la suma de los números restantes es a lo más $\frac{16 \cdot 17}{2} - 50 = 86$. Un ejemplo con 86 es el siguiente:

16	13	8	1
14	15	9	2
10	11	12	3
4	5	6	7

$\longrightarrow$

	13	8	1
14		9	2
10	11		3
4	5	6	

Por lo tanto, el mayor valor es 86.

Problema 3

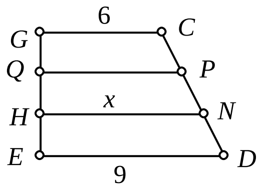
Solución. Notemos que cada caballero ha hecho las dos veces la misma afirmación: *Mis dos vecinos son mentirosos*, y estas afirmaciones son verdaderas. Luego los caballeros están aislados en ambos arreglos circulares y no hay dos caballeros adyacentes. En otras palabras, los arreglos consisten de caballeros aislados, separados por bloques de mentirosos consecutivos (la cantidad de bloques es igual a la cantidad de caballeros).

En el primer arreglo cada mentiroso afirmó *Mis dos vecinos son mentirosos*, y esto es falso. Entonces cada mentiroso tiene al menos un vecino caballero. Se sigue que todo bloque de mentirosos consecutivos tiene longitud a lo sumo 2. Sea k el número de caballeros entre los 2018 residentes. Tomando en cuenta los k caballeros y los k grupos de a lo sumo 2 mentirosos obtenemos $2018 \le k + 2k = 3k$. Luego $k \ge \frac{2018}{3}$.

En el segundo arreglo cada mentiroso afirmó *Ninguno de mis vecinos, el de la izquierda y el de la derecha, es de mi misma clase* y esto es falso. De modo que cada mentiroso tiene por lo menos un vecino mentiroso. lo que implica que todo bloque de mentirosos consecutivos tiene longitud mayor o igual que 2. Sea ℓ el número de caballeros en el arreglo de 2017 residentes; es claro que $\ell = k$ o $\ell = k-1$ según el residente que abandonó el pueblo sea un mentiroso o un caballero. Tomando en cuenta los ℓ caballeros y los ℓ bloques de longitud mayor o igual que 2 obtenemos $2017 \ge \ell + 2\ell = 3\ell$. De modo que $\ell \le \frac{2017}{3}$.

En síntesis, $\ell \le \frac{2017}{3} < \frac{2018}{3} \le k$ de modo que $\ell < k$. Por lo tanto, $\ell = k-1$ lo que significa que el residente que se fue es un caballero.

Problema 4



Solución. Sean E, F, G y H puntos en la recta AM tales que DE, BF, CG y NH son perpendiculares a la recta AM. Los triángulos rectángulos BFM y DEA tienen los mismos ángulos, pues sus lados son respectivamente paralelos. Por lo tanto, son semejantes, y como $\frac{AD}{BM} = 3$, la razón de semejanza es 3. De esto deducimos que $DE = 3BF = 9$.

Análogamente los triángulos CGM y BFM son semejantes de razón 2. Por lo tanto, $CG = 2BF = 6$.

Sea P el punto medio de NC y Q el pie de la perpendicular a AM trazada por P. Esto se puede ver en la figura

Sea $HN = x$ la distancia requerida. Notamos que PQ es base media del trapecio $GCNH$, luego $PQ = \frac{x+6}{2}$, además, HN es base media del trapecio $PQED$, luego $HN = x = \frac{PQ+9}{2} = \frac{\frac{x+6}{2}+9}{2}$, de donde $x = 8$, que es la distancia que nos piden.

Problema 5

Solución. Tales 4 puntos existen para cualquier coloración de la circunferencia con 10 colores. Es suficiente demostrar que hay 4 puntos distintos A, B, C, D del mismo color tales que $AB = CD$; entonces $AC \parallel BD$ o $AD \parallel BC$.

Sea P un polígono regular de $2n+1$ lados inscripto en la circunferencia donde n se especificará más tarde. Al menos $\frac{1}{10}(2n+1)$ vértices de P son del mismo color. Consideramos $k \ge \frac{1}{10}(2n+1)$ de tales vértices y las $\frac{1}{2}k(k-1)$ distancias entre ellos. Llamamos a estas distancias admisibles y notamos que ellas toman a lo sumo n valores diferentes pues nuestros puntos son vértices de P. Luego alguna distancia admisible ocurre por lo menos $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}k(k-1) \ge \frac{1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{10} \cdot \frac{2n-9}{10} = \frac{(2n+1)(2n-9)}{200n}$ veces. Se puede elegir n suficientemente grande de modo que $\frac{(2n+1)(2n-9)}{200n} > 3$ (basta tomar $n \ge 155$). Esto asegura al menos 4 segmentos con extremos del mismo color y longitudes iguales. Observemos que cada vértice de P puede ser extremo común de a lo sumo dos de tales segmentos iguales. Se sigue que entre los ya mencionados 4 segmentos hay dos que no tienen ningún extremo común, lo que completa el argumento.

Primer Nivel

Problema 1

Solución. Acotamos los valores posibles del último dígito de los números cuyos cuadrados tienen igual cifra de las unidades que el número. La lista es:

0 , 1 , 5 , 6,

pero el número no puede terminar en 0, porque en ese caso el cuadrado termina en 00 y $\overline{00}$ no es un número de dos cifras.

Analizamos qué pasa si el número de dos dígitos es de la forma $\overline{a1}$, $a \neq 0$:

$$(10a + 1)^2 = 100a^2 + 20a + 1.$$

Vemos que no hay valores de *a* que cumplan:

$$\left(\overline{a1}\right)^2 = \cdots a1.$$

Efectivamente, $(10a+1)^2 = 100a + 2a10 + 1$ que tiene la cifra de las decenas igual a la de $2a$ y por lo tanto, distinta de *a*.

Para la forma $\overline{a5}$:

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25.$$

Como $100a^2 + 100a$ es múltiplo de 100, la única posibilidad es $a = 2$.

Tenemos entonces un número que cumple las condiciones del problema: 25.

Para la forma $\overline{a6}$, haremos los cálculos:

$$(10a+6)^2 = 100a^2 + 12a10 + 36$$

que termina en *a*6 solo si $2a+3$ termina en *a*, o sea si $2a+3 = 10+a$, o sea, $a = 7$. Obtenemos así la segunda solución:

76.

Hay dos números que cumplen la condición del problema: 25 y 76

Problema 2

Solución. Sea *n* el número de competidores. Cada uno de los 5 competidores mencionados jugó $n-1$ juegos. Como perdió 2, cada uno ganó $n-1-2 = n-3$ juegos.

Cada uno de los otros $n-5$ competidores también jugó $n-1$ juegos, ganando 3 y perdiendo $n-1-3 = n-4$ juegos cada uno.

Así, en total el número de juegos perdidos es $5 \cdot 2 + (n-5)(n-4)$ y el de juegos ganados es $(n-5)3 + 5(n-3)$.

Como el número de ganados es igual al número de perdidos se tiene

$5 \cdot 2 + (n-5)(n-4) = 3(n-5) + 5(n-3)$,

$$n^2 - 17n + 60 = 0,$$

$$(n-5)(n-12) = 0,$$

$$n = 5 \text{ o } n = 12.$$

Como el torneo contiene más de 5 jugadores, debe ser $n = 12$.

Si $n = 12$ hay torneos que cumplen lo pedido, por ejemplo:

Sean $a_1, ..., a_5$ los jugadores con dos partidos perdidos y $b_1, ..., b_7$ los que tienen tres partidos ganados. Consideramos los subíndices de a_i en módulo 5 y los de b_i en módulo 7. Cada a_i le ganó a a_{i+1} y a_{i+2} , y perdió con a_{i-1} y a_{i-2}. Cada b_i le ganó a $b_{i+1}, b_{i+2}, b_{i+3}$ y perdió con $b_{i-1}, b_{i-2}, b_{i-3}$. Además, cada a_i le ganó a cada b_j.

Problema 3

Solución. La respuesta es 21. Dividimos la lista en grupos de números iguales. Entonces el número de grupos es igual a la cantidad *N* de números distintos que contiene la lista. Sea un grupo *G* que consiste de todas las x_a copias de un número dado *a*. Por hipótesis *a* es igual al tamaño total de todos los grupos distintos de *G*, que es $250 - x_a$. En particular $a \neq b$ implica $x_a \neq x_b$.

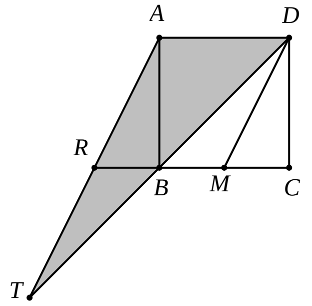
Entonces los *N* grupos tienen distinto tamaño y su tamaño total es a lo sumo $1+2+...+N$. Sigue que $N \leq 21$ pues $1+2+...+22 = 253 > 250$. Un ejemplo para $N = 21$: Para cada $k = 1, 2, ..., 20$

tomamos k copias de $250-k$, en total 210 números, y 40 copias de 210. Esta colección de 250 números satisface las hipótesis.

Problema 4

Solución. Supongamos sin pérdida de generalidad que *ABCD* es un cuadrado de lado 2. Sea *M* el punto medio de *BC*, trazamos los segmentos *BD* y *DM* para obtener así las tres partes. En la prolongación de *CB* ubicamos un punto *R* tal que *RB*=*BM*=*MC*=1 (*B* está entre *R* y *C*). En la prolongación de *DB* ubicamos un punto *T* tal que *DB*=*BT*. Notamos que los triángulos *RBA* y *MCD* son congruentes, entonces $BRA = CMD$. Por otro lado, los triángulos *RBT* y *MBD* son congruentes, entonces $BRT = BMD$. Sumando las dos últimas igualdades obtenemos

$BRA + BRT = CMD + BMD = 180^{o}$, entonces *A*, *R* y *T* son colineales. Notamos que con las tres partes en que se dividió el cuadrado se puede formar el triángulo obtusángulo *ADT*.



Problema 5

Solución. La respuesta es no. Vamos a demostrar que para toda permutación $a_1, a_2, ..., a_n$ de 1, 2, ..., n los valores absolutos $|a_1-1|, |a_2-2|, ..., |a_n-n|$ se pueden dividir en dos grupos con sumas iguales. Notemos que $(a_1-1)+(a_2-2)+...+(a_n-n)=0$ pues $a_1, a_2, ..., a_n$ es una permutación de 1, 2, ..., n. Cada sumando a_k-k es igual a $|a_k-k|$ o $-|a_k-k|$, según sea $a_k \geq k$ o $a_k < k$. Luego la igualdad anterior se puede escribir como $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k |a_k-k| = 0$, donde $\varepsilon_k = 1$ o $\varepsilon_k = -1$. Pasamos los sumandos $\varepsilon_k |a_k-k|$ con $\varepsilon_k = -1$ al miembro de la derecha. Esto nos da la división que deseábamos.

Cabe destacar que se pueden ignorar los sumandos con $|a_k-k|$ igual a cero, porque estos pueden agregarse a cualquier grupo una vez hecha la separación que se explicó.

Todo esto nos indica una manera de pintar: Beto marca las columnas en las que los números de la primera fila que son más grandes que los de la segunda fila y pinta los números en la tercera fila de las columnas marcadas.

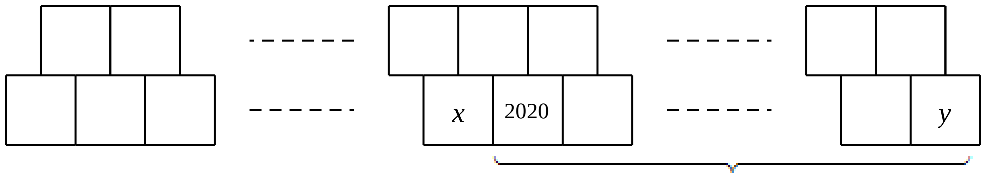
Segundo Nivel

Problema 1

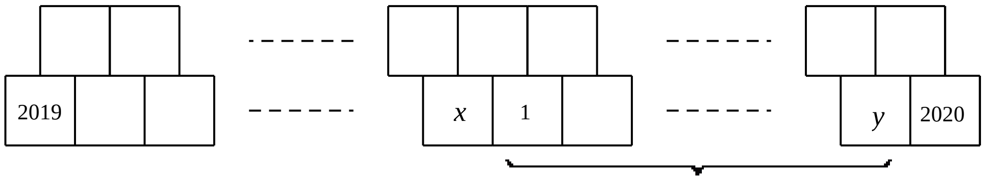
Solución. Supongamos que n es piola. Como n dividido entre 2 puede dejar solo restos 0 o 1, y el enunciado establece que no puede dejar resto 0, debe dejar resto 1. Ahora n entre 3 no puede dejar resto 0 ni 1, luego la única posibilidad que le queda es dejar resto 2. Continuando del mismo modo resulta que n entre k deja resto $k-1$ para $k=2,...,10$. Entonces $n+1$ es múltiplo de $2,...,10$, y por lo tanto es múltiplo del mínimo común múltiplo de esos números que es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. Es decir que los números piolas son los de la forma $2520t-1$ para t entero positivo. La condición $1 \leq 2520t-1 \leq 100000$ equivale a $1 \leq t \leq \dfrac{100001}{2520}$ o $1 \leq t \leq 39$, es decir que hay 39 enteros piolas entre 1 y 100000.

Problema 2

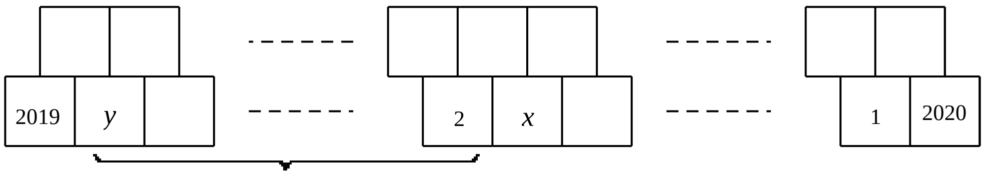
Solución. Veamos cómo se deben ordenar los números para minimizar la suma. En primer lugar, el 2020 debe estar en un extremo, pues si no es así vamos a tener



Si en la fila de abajo damos vuelta todos los números del intervalo marcado con una llave, es decir cambiamos $2020\ a\ b\ ...\ c\ d\ y$ por $y\ d\ c\ ...\ b\ a\ 2020$, en la fila de arriba tenemos los mismos productos en otro orden, excepto $2020\cdot x$ que se cambió por $x\cdot y$. Como $y<2020$, tenemos un número menor. En una configuración en la que la suma es mínima, 2020 debe estar en un borde. Con un razonamiento análogo vemos que si 2020 está en un borde, 2019 debe estar en el otro borde.
Ahora hacemos la siguiente observación. Dados cuatro números positivos distintos, si los separamos en dos parejas y calculamos la suma de sus productos, el menor resultado se obtiene cuando en una de las parejas está el número más grande con el más chico. Es decir, dados $0<a<b<c<d$, tenemos $ad+bc<ab+cd$ y $ad+bc<ac+bd$. Esto es cierto porque $ad+bc<ab+cd$ es equivalente a $(c-a)(d-b)>0$ y $ad+bc<ac+bd$ es equivalente a $(b-a)(d-c)>0$.
Con esta observación en mente vemos que 1 debe estar al lado de 2020. Supongamos que no, entonces



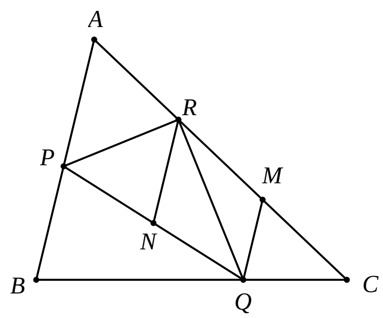
Si damos vuelta el intervalo marcado, la suma de los productos pierde $x\cdot 1$ e $y\cdot 2020$, y gana $x\cdot y$ y $1\cdot 2020$. Como $1<x,y<2020$, tenemos que $x\cdot y+1\cdot 2020<x\cdot 1+y\cdot 2020$, por lo que 1 debe estar al lado de 2020. De igual manera, 2 debe estar al lado de 2019, pues si damos vuelta el intervalo la suma disminuye ya que tenemos $x\cdot y+2\cdot 2019<2019\cdot y+x\cdot 2$ pues $2<x,y<2019$.



Repitiendo este razonamiento obtenemos que los números deben estar ubicados de la siguiente manera
$2019\ 2\ 2017\ 4\ ...\ 1013\ 1010\ 1011\ 1012\ 1009\ 1014\ ...\ 3\ 2018\ 1\ 2020$.
Si al comenzar resulta que 2020 está en la otra punta obtenemos el orden inverso. Estas son las únicas dos posibilidades que realizan el mínimo.

Problema 3

Solución. Sea M el punto medio de RC entonces $AR=RM=MC$ con lo cual $AM=2MC$ y $MQ \parallel AB$. Sea N el punto medio de PQ, entonces RN es la base media del trapecio $APQM$. En el triángulo rectángulo PRQ, N es el punto medio de la hipotenusa PQ, entonces $NPR=NRP$ y como $AP \parallel RN$, obtenemos que $APR=NRP$, entonces $APR=NPR=RPQ$.



Problema 4

Solución. Sea $\overline{a_1a_2...a_k}$ un número que cumple las condiciones del enunciado. Al insertar el dígito 2 entre los dos últimos dígitos, obtenemos que a_k es múltiplo de 2. Análogamente, al insertar el dígito 5, obtenemos que a_k es múltiplo de 5. Por lo tanto, $a_k=0$.
Sea i cualquier índice entre 2 y $k-1$, inclusive, entonces los números $\overline{a_1...7a_i...a_k}$ y $\overline{a_1...a_i7...a_k}$ son ambos múltiplos de 7. Al restar obtenemos que $7-a_i$ es múltiplo de 7, con lo cual concluimos que a_i es 0 o 7. Sabemos ahora que cualquier dígito a partir del segundo es 0 o 7, luego, si

insertamos un dígito 7 entre los primeros dos dígitos, el resultado debe ser múltiplo de 7, por lo tanto, el primer dígito es 7. Es decir, $a_1 = 7$.

Insertando el dígito 8 entre los últimos dos dígitos obtenemos que $\overline{a_{k-1}80}$ es múltiplo de 8 y como a_{k-1} es 0 o 7, es claro que la única posibilidad es $a_{k-1} = 0$. El número 700 no cumple la condición del problema, entonces si $a_{k-2} = 7$ debería haber al menos un dígito antes y si insertamos el dígito 8 antes del 7 obtenemos un múltiplo de 8 que termina en 700, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $a_{k-2} = 0$.

Tenemos que el número es de la forma $\overline{7...000}$ donde cada uno de los otros dígitos es 0 o 7. Si insertamos un dígito 9 después del primer dígito 7, concluimos que la cantidad total de 7 es múltiplo de 9 y , en consecuencia, la cantidad de dígitos 7 es al menos 9. De esta forma el número que buscamos es como mínimo 777777777000 y no es difícil comprobar que ese número cumple la condición del enunciado (por ejemplo, si insertamos un dígito 6 en cualquier posición, obtenemos un número que termina en 0 y que tiene suma de dígitos 69, es por eso que obtenemos un múltiplo de 6). Por lo tanto, ese número es el mínimo.

Problema 5

Solución. La respuesta es $\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Tomamos un conjunto de *k* de estos triángulos y hacemos la lista de sus 3*k* lados. Cada triángulo tiene un lado que es exclusivamente suyo, de modo que la lista contiene $l \geq k$ que aparecen exactamente una vez. También hay a lo sumo $\binom{n}{2} - l$ segmentos distintos que aparecen más de una vez (pues $\binom{n}{2}$ es la cantidad total de segmentos que unen dos de los *n* puntos). Observamos que cada uno de estos segmentos no únicos aparece a lo sumo $n-2$ veces, pues es lado de a lo sumo $n-2$ triángulos. Todo lo anterior implica que $3k \leq l + (n-2)(\binom{n}{2} - l)$. Reescribimos esta desigualdad como

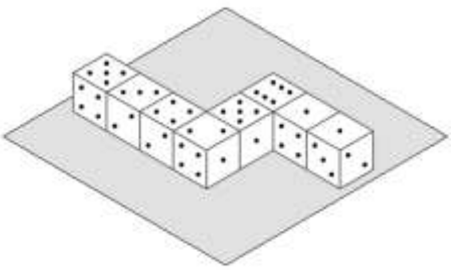
$3k + (n-3)l \leq (n-2)\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$. Usamos ahora que $l \geq k$ para obtener

$nk \leq \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$. Luego $k \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = \binom{n-1}{2}$.

Damos a continuación un ejemplo para $k = \binom{n-1}{2}$. Tomamos uno de los *n* puntos, *A*, y consideramos todos los triángulos con un vértice en *A*. Hay $\binom{n-1}{2}$ de estos triángulos, pues el lado opuesto a *A* puede elegirse de $\binom{n-1}{2}$ maneras. Además este lado solo le corresponde a uno de los triángulos. Así, este conjunto tiene la propiedad buscada.

26ª Olimpiada de Mayo 2020 - Soluciones

Primer Nivel
Problema 1



Sofía ubica los dados sobre una mesa como se muestra en la figura, juntando caras que tienen el mismo número en cada dado. Ella da vueltas alrededor de la mesa sin tocar los dados. ¿Cuál es la suma de los números de todas las caras que no puede ver?
Nota. En todo dado los números de las caras opuestas suman 7.
Solución. Los números que no se pueden ver son los de las caras que están apoyadas en la mesa y las caras que están juntas entre sí. Como las caras opuestas suman 7, entonces la suma de todas las 8

caras superiores más la suma de las 8 caras inferiores será igual a $7 \cdot 8 = 56$, entonces:

$$(5 + 3 + 4 + 2 + 5 + 6 + 1 + 1) + \text{Suma Caras Inferiores} = 56$$

$$\text{Suma Caras Inferiores} = 56 – 27 = 29.$$

Ahora, para las caras pegadas podemos comenzar por el dado de la derecha, en donde vemos que la cara opuesta al 2 es la que está pegada al otro dado, o sea, el 5 (porque ambos deben sumar 7). Entonces una cara oculta es el 5, pero como los dados están juntos por tener caras iguales, en realidad hay 2 caras con 5 que están ocultas, una por cada dado.

Siguiendo el proceso anterior vamos deduciendo qué números tiene cada cara de los dados que están pegados a otro dado, y obtenemos que la suma total de estas caras será:

$$\text{Suma Caras Pegadas} = (2\cdot 5)+(2\cdot 2)+(2\cdot 3)+(2\cdot 4)+(2\cdot 6)+(2\cdot 1)+(2\cdot 6)$$

$$\text{Suma Caras Pegadas} = 54$$

Finalmente, el total de los números que no se puede ver es la suma de los números de las caras inferiores más los de las caras pegadas:

$$\text{Suma de Números Ocultos} = \text{Suma Caras Inferiores} + \text{Suma Caras Pegadas}$$

$$\text{Suma de Números Ocultos} = 29 + 54$$

$$\text{Suma de Números Ocultos} = 83$$

Problema 2

Pablo escribió la lista de todos los números de cuatro cifras tales que el dígito de las centenas es 5 y el dígito de las decenas es 7. Por ejemplo, 1**57**3 y 7**57**0 están en la lista de Pablo, pero 2754 y 571 no. Calcular la suma de todos los números de la lista de Pablo.

Nota. Los números de la lista de Pablo no pueden empezar con cero.

Solución. Sea *a*57*b* un número de la lista de Pablo. Como el valor de *a* puede ser 1, 2, … ,9 y el valor de *b* puede ser 0, 1, 2, … ,9; el total de números con la forma *a*57*b* es:

$$9 \cdot 10 = 90$$

En las unidades de mil el 1 está repetido 10 veces, el 2 está repetido 10 veces, y así hasta el 9. La suma de todos estos números es:

$$10 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) \cdot 1\,000 = 10 \cdot 45 \cdot 1\,000 = 450\,000$$

En las centenas tenemos el 5 repetido 90 veces. La suma total es:

$$90 \cdot 5 \cdot 100 = 45\,000$$

En las decenas tenemos el 7 repetido 90 veces y la suma de todos ellos es:

$$90 \cdot 7 \cdot 10 = 6\,300$$

En las unidades el 0 está repetido 9 veces, el 1 está repetido 9 veces, y así hasta el 9. La suma de todos estos números es:

$$9 \cdot (0 + 1 + 2 + \ldots + 9) \cdot 1 = 9 \cdot 45 = 405$$

La suma total es:

$$450\,000 + 45\,000 + 6\,300 + 405 = 501\,705$$

Problema 3

Una hormiga despistada hace el siguiente recorrido: comenzando en el punto *A* va 1 cm al norte, después 2 cm al este, a continuación 3 cm al sur, luego 4 cm al oeste, de inmediato 5 cm al norte, continúa 6 cm al este, y así sucesivamente, finalmente 41 cm al norte y termina en el punto *B*. Calcular la distancia entre *A* y *B* (en línea recta).

Solución. Representamos en un par de ejes cartesianos el norte hacia arriba y el este hacia la derecha. Verticalmente sube 1 cm, baja 3 cm, sube 5 cm, …, sube 41 cm. Luego, sube en total

$1-3+5-7+9-\cdots-39+41=1+2+2+\cdots+2=1+2\cdot 10=21\text{cm}$.

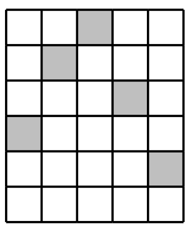
Horizontalmente va 2 cm a la derecha, 4 cm a la izquierda, …, 40 cm a la izquierda. Luego avanza a la izquierda en total $-2+4-6+8-\cdots-38+40=2+2+\cdots+2=2\cdot 10=20\,\text{cm}$.

Finalmente, *B* está 21 cm arriba y 20 cm a la izquierda de *A* y por el teorema de Pitágoras obtenemos que

$AB=\sqrt{21^2+20^2}=29\text{cm}$.

Problema 4

María tiene un tablero de 6×5 con algunas casillas sombreadas, como en la figura. Ella escribe, en algún orden, los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 en la primera fila y luego completa el tablero de la siguiente manera: mira el número escrito en la casilla sombreada y escribe el número que ocupa la posición indicada por la casilla sombreada como último número de la fila siguiente, y repite los demás números en las primeras cuatro casillas, siguiendo el mismo orden que tenían en la fila anterior.



Por ejemplo, si escribió 2 3 4 1 5 en la primera fila, entonces como en la casilla sombreada está el 4, el número que ocupa el cuarto lugar (el 1) lo escribe en la última casilla de la segunda fila y la completa con los restantes números en el orden en que estaban. Queda: 2 3 4 5 1.

2	3	4	1	5
2	3	4	5	1
2	3	5	1	4
3	5	1	4	2
3	5	4	2	1
5	4	2	1	3

Luego, para completar la tercera fila, como en la casilla sombreada está el 3, el número ubicado en el tercer lugar (el 4) lo escribe en la última casilla y obtiene 2 3 5 1 4. Siguiendo de la misma manera obtiene el tablero de la figura.

Mostrar una manera de ubicar los números en la primera fila para obtener en la última fila los números 2 4 5 1 3.

Solución. Hay tres maneras de completar el tablero. El problema solo pide una.

5	3	4	1	2
5	3	4	2	1
5	3	2	1	4
3	2	1	4	5
3	2	4	5	1
2	4	5	1	3

2	4	1	5	3
4	1	5	3	2
1	5	3	2	4
1	3	2	4	5
3	2	4	5	1
2	4	5	1	3

4	1	5	3	2
4	1	5	3	2
1	5	3	2	4
1	3	2	4	5
3	2	4	5	1
2	4	5	1	3

Problema 5

Sobre una mesa hay varias cartas, algunas boca arriba y otras boca abajo. La operación permitida es elegir 4 cartas y darlas vuelta. El objetivo es obtener todas las cartas en el mismo estado (todas boca arriba o todas boca abajo). Determinar si es posible lograr el objetivo mediante una secuencia de operaciones permitidas si inicialmente hay:

c) 101 cartas boca arriba y 102 boca abajo;

d) 101 cartas boca arriba y 101 boca abajo.

Solución. a) Sí. En la primera movida damos vuelta 1 carta boca arriba y 3 cartas boca abajo. Esto nos da 103 cartas boca arriba y 100 boca abajo. Estos últimos 100 se dividen en 24 cuaternas y se les aplica la operación a cada cuaterna. Al final, están todas las cartas boca arriba.

b) No. Si en una etapa hay *k* cartas boca arriba, una operación puede cambiar *k* en *k*, $k \pm 2$, $k \pm 4$. Luego, se preserva la paridad de *k*. Lo mismo ocurre con el número ℓ de cartas boca abajo. Inicialmente $k = \ell = 101$, de manera que *k* y ℓ siempre permanecen impares. Si fuera posible hacer que todos las cartas tengan el mismo estado, tendríamos, después de la última movida, $k = 0$, $\ell = 202$ o $k = 202$, $\ell = 0$. Esto es imposible.

Segundo Nivel

Problema 1

Decimos que un número entero positivo es *súper-impar* si todos sus dígitos son impares. Por ejemplo, 1737 es súper-impar y 3051 no lo es. Hallar un entero positivo par que **no** se pueda expresar como suma de dos números súper-impares y explicar por qué no es posible expresarlo de esa manera.

Solución. Vamos a demostrar que 220 no se puede expresar como suma de dos números súper-impares.

Supongamos que sea posible expresar 220 como suma de dos enteros positivos súper-impares, entonces al menos uno de ellos tiene tres dígitos. Como dicho número es súper-impar, es claro que su primer dígito es 1 (si fuera mayor o igual que 3, la suma no podría ser 220). Luego, tenemos tres casos según la cantidad de dígitos del otro sumando:

- Primer caso: $220 = 1ab + c$, es claro que el lado derecho es como máximo 199+9, luego, no hay solución en este caso.
- Segundo caso: $220 = 1ab + cd$ como *b* y *d* son impares y *b* + *d* = 10, llevamos 1 al dígito de las decenas y obtenemos una contradicción porque *a* + *c* es par.
- $220 = 1ab + cde$ es claro que el lado derecho es al menos 111+111, y tampoco obtenemos solución en este caso.

Problema 2

c) Determinar si existen enteros positivos a, b y c, no necesariamente distintos, tales que $a + b + c = 2020$ y $2^a + 2^b + 2^c$ es un cuadrado perfecto.

d) Determinar si existen enteros positivos a, b y c, no necesariamente distintos, tales que $a + b + c = 2020$ y $3^a + 3^b + 3^c$ es un cuadrado perfecto.

Solución. a) Sí existen. Por ejemplo, podemos hacer que $2^a + 2^b + 2^c = (2^x + 2^y)^2 = 2^{2x} + 2^{x+y+1} + 2^{2y}$, es decir, $a = 2x$, $b = x + y + 1$, $c = 2y$, para lo cual es suficiente que se cumpla $3x + 3y + 1 = 2020$. Luego, podemos tomar $x = 1$ y $y = 672$. Finalmente, el ejemplo es $a = 2$, $b = 674$, $c = 1344$.

b) No existen. Supongamos que *a*, *b*, *c* son enteros positivos tales que $a + b + c = 2020$, tenemos dos casos:

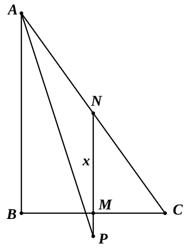
- Si *a*, *b*, *c* son pares entonces cada uno de los números $3^a, 3^b, 3^c$ sería una potencia de 9 y, en consecuencia, cada uno sería múltiplo de 4 más 1, con lo cual $3^a + 3^b + 3^c$ sería múltiplo de 4 más 3, que no es un cuadrado.
- Si uno de los números *a*, *b*, *c* es par y los otros dos impares, sin pérdida de generalidad, $a = 2m$, $b = 2n + 1$, $c = 2k + 1$, entonces $3^a + 3^b + 3^c = 9^m + 3.9^n + 3.9^k$ que también es múltiplo de 4 más 3 y, por lo tanto, no es un cuadrado.

En cualquier caso obtenemos un múltiplo de 4 más 3, que no puede ser un cuadrado perfecto porque el cuadrado de un número impar es múltiplo de 4 más 1.

Problema 3

Se tiene una caja con 2020 piedras. Ana y Beto juegan a retirar piedras de la caja, alternadamente y comenzando por Ana. Cada jugador en su turno debe retirar un número positivo de piedras que sea capicúa. El que logre dejar la caja vacía gana. Determinar cuál de los dos tiene una estrategia ganadora, y explicar cuál es esa estrategia.
Nota. Un entero positivo es capicúa si se lee igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha. Por ejemplo 3, 22, 484 y 2002 son capicúas.
Solución. Beto tiene una estrategia ganadora. Como ningún número capicúa es múltiplo de 10, luego de la primera jugada de Ana en el montón queda un número *k* de piedras que no es múltiplo de 10. Entonces Beto retira un número de piedras igual al resto de la división de *k* entre 10 (ese resto es capicúa pues es un entero del 1 al 9), con lo cual le vuelve a dejar a Ana un múltiplo de 10. Continuando de esta manera, Ana dejará siempre en el montón un número de piedras que no es múltiplo de 10, y Beto retirará el resto de la división de ese número entre 10, dejándole a Ana en el montón un múltiplo de 10. Eventualmente Ana dejará en el montón un número de piedras menor que 10, y Beto las retirará todas ganando.
Nota. Una estrategia ganadora mejorada para Beto, que le permite ganar más rápido, consiste en retirar, en su turno, el mayor número capicúa de piedras que no supere al de las que quedan en el montón, y que tenga el mismo dígito de las unidades que éste. Por ejemplo si Ana retira una piedra en su primera jugada, dejando 2019, Beto puede retirar 999, dejando 1020.

Problema 4



Sean *ABC* un triángulo rectángulo, recto en *B*, y *M* el punto medio del lado *BC*. Sea *P* el punto en la bisectriz del ángulo BAC tal que *PM* es perpendicular a *BC* (*P* está fuera del triángulo *ABC*). Determinar el área del triángulo *ABC* si *PM* = 1 y *MC* = 5.
Solución. Prolongamos *PM* hasta que corte en *N* a la hipotenusa *AC*. Como *M* es punto medio de *BC*, entonces *N* es punto medio de *AC*. Como $PAB = PAC$ y *NP* es paralelo a *AB*, entonces $NPA = NAP$, luego *NA*=*NP*. Pero sabemos que *N* es punto medio de *AC*, entonces *NP*=*NA*=*NC*. Sea *NM*=*x*, entonces *NC*=*NP*=*x*+1. En el triángulo rectángulo *NMC* aplicamos el Teorema de Pitágoras y obtenemos $(x+1)^2 = x^2 + 25$, de donde *x*=12. Finalmente, *AB*=2·*NM*=2*x*=24 y concluimos que el área del triángulo *ABC* es

$$\frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{24 \cdot 10}{2} = 120.$$

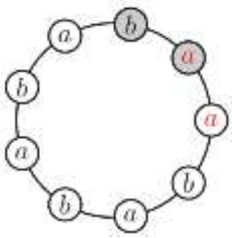
Problema 5

Decimos que un entero positivo *n* es *circular* si es posible colocar los números 1, 2, …, *n* alrededor de una circunferencia de tal manera que no haya tres números adyacentes cuya suma sea múltiplo de 3.

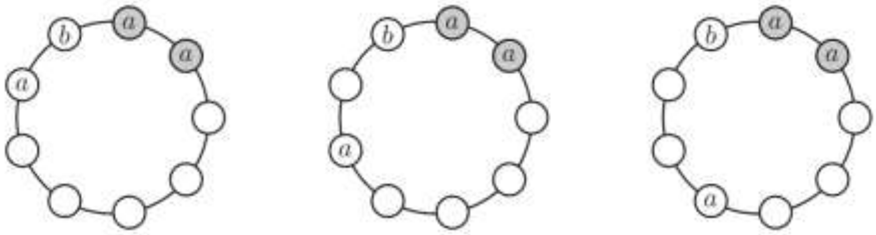
c) Demostrar que 9 no es circular.
d) Demostrar que todo entero mayor que 9 es circular.

Solución. Puesto que solo nos interesa la suma en módulo 3, podemos reemplazar cada número por el resto que deja al ser dividido entre 3.

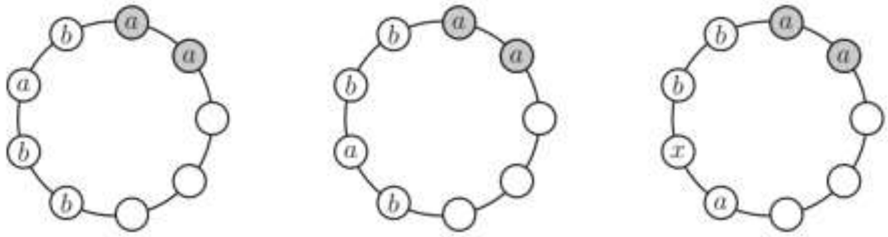
a) Supongamos lo contrario, es decir, que existe una forma de colocar los números 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0 de tal manera que la suma de cada tres números adyacentes no sea múltiplo de 3. Vamos a probar que en cualquier distribución hay dos números adyacentes iguales. En efecto, si no fuera así, supongamos que *a* y *b* son dos números adyacentes (con *a*≠*b*) y sea *c* el tercer número. Considerando que *a, b* y *c* no pueden estar en posiciones adyacentes (porque 0+1+2 es múltiplo de 3), obtenemos que los números son *a, b, a, b, a, b, a, b, a,* con lo que tendríamos dos números *a* adyacentes, contradiciendo nuestra suposición.



Como existen dos números adyacentes iguales, digamos que sean dos *a*. Considerando simetría, la posición del tercer número *a* tiene tres posibilidades. En cada caso sea *b* el número que sigue a las dos *a* en sentido anti-horario:

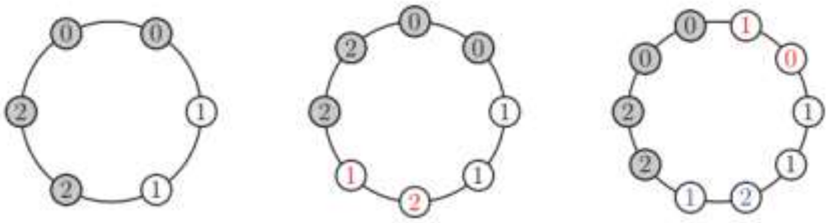


En cada caso se puede completar algunas posiciones:

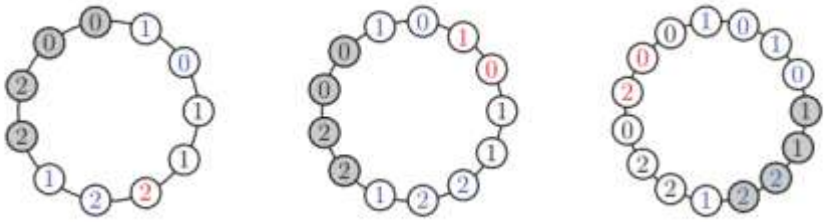


En los dos primeros casos las tres c deberían ir juntas. En el tercer caso, el círculo marcado con x no puede ser a, pues ya se usaron las 3, no puede ser b porque quedarían 3 b consecutivas, y no puede ser c porque $a + b + c = 0 + 1 + 2 = 3$. Por lo tanto, de cualquier forma aparecen tres números cuya suma es múltiplo de 3, es decir, 9 no es circular.

b) Diremos que un entero positivo n es súper circular si n es circular y además cumple que existe una distribución de los números alrededor de la circunferencia en la que hay cuatro números adyacentes que son de la forma $a\ a\ b\ b$, siendo $a \neq b$. Los siguientes ejemplos muestran que 6, 8, 10, 11, 13 y 15 son números súper circulares:



$n = 6$ $\quad$ $n = 8$ $\quad$ $n = 10$



$n = 11$ $\quad$ $n = 13$ $\quad$ $n = 15$

Mostremos que, para cualquier $n \geq 6$, si n es un número súper circular entonces n+6 también es un número súper circular. En efecto, tomamos los cuatro números de la forma $a\ a\ b\ b$, y entre los números adyacentes a y b escribimos los números $b\ b\ c\ c\ a\ a$. Al hacer esto estamos aumentado dos 0, dos 1 y dos 2 (los cuales serían los números n+1, n+2, …, n+6) y además no aparecen tres números adyacentes cuya suma sea múltiplo de 3. Por lo tanto $n + 6$ también es súper circular. En particular tenemos que 6+6=12 y 8+6=14 son súper circulares. Como 10, 11, 12, 13, 14 y 15 son súper circulares y n es súper circular implica que n+6 también es súper circular, concluimos que todos los números a partir de 10 son súper circulares y en particular, son circulares.

27ª Olimpiada de Mayo - Soluciones primer nivel

Problema 1

En un bosque hay 5 árboles A, B, C, D, E que se encuentran en ese orden sobre una línea recta.
En el punto medio de AB hay una margarita, en el punto medio de BC hay un rosal, en el punto medio de CD hay un jazmín y en el punto medio de DE hay un clavel. La distancia entre A y E es de 28 m; la distancia entre la margarita y el clavel es de 20 m. Calcular la distancia entre el rosal y el jazmín.

Solución. Sean U, V, X, Y la margarita, el rosal, el jazmín y el clavel, respectivamente.

La distancia que queremos calcular es VX, que es igual a $\frac{1}{2}(BC + CD) = \frac{1}{2}BD$. Notemos que

$AU + YE = AE - UY = 28 - 20 = 8$ y también $AU + YE = \frac{1}{2}(AB + DE)$. Luego $\frac{1}{2}(AB + DE) = 8$,

$AB + DE = 16$, $BD = AE - (AB + DE) = 28 - 16 = 12$; $VX = \frac{1}{2}BD = 6$.

Problema 2
En un tablero cuadriculado de 2×8 se desea colorear cada casilla de rojo o azul de modo tal que en cada subtablero de 2×2 haya al menos 3 casillas pintadas de azul. ¿De cuántas maneras se puede realizar esta coloración?
Nota. Un subtablero de 2 × 2 es un cuadrado formado por cuatro casillas que tienen un vértice común.
Solución 1. Sea a_n el número de coloraciones permitidas tales que en la última columna los colores son *AA*. Sea b_n el número de coloraciones permitidas tales que en la última columna los colores son *AR* (*A* en la casilla superior y *R* en la inferior). Notemos que por simetría (intercambiando los colores de la primera y de la segunda fila), el número de coloraciones permitidas tales que en la última columna los colores son *RA* también es b_n.
Consideremos las coloraciones permitidas tales que la última columna tienen los colores *AA*. Analizando los posibles colores de la penúltima fila podemos concluir que $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$, para $n \geq 3$. (1)
Análogamente, si consideramos las coloraciones permitidas que en la última columna tienen los colores *AR* y analizamos los posibles colores de la penúltima fila podemos concluir que $b_n = a_{n-1}$, para $n \geq 3$. (2)
De (1) y (2), y además, teniendo en cuenta que $a_2 = 3$ y $b_2 = 1$ podemos completar los valores de a_n y b_n en la siguiente tabla:

n	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	3	5	11	21	43	85	171	341
b_n	1	3	5	11	21	43	85	171

Finalmente, lo que nos piden es $a_8 + 2b_8 = a_9 = 341$.

Solución 2. Como en cada cuadrado de 2×2 puede haber a lo sumo 1 casilla roja, en todo el tablero hay a lo sumo 4 casillas rojas.
Separamos en casos según la cantidad de casillas rojas del tablero.
Si no hay ninguna casilla roja, es <u>1 posibilidad</u>.
Si hay 1 casilla roja, cualquiera sea la posición de la misma en el tablero se cumplirá la condición. Por lo tanto son <u>16 posibilidades</u>.
Para los demás casos hacemos la siguiente observación. Cada columna del tablero puede tener 0 o 1 casilla roja. Además no puede haber dos columnas consecutivas con 1 casilla roja, pues entonces habría un cuadrado de 2×2 con 2 casillas rojas y, por ende, menos de 3 azules.
Si hay 2 casillas rojas en el tablero, entonces hay 2 columnas que tienen 1 casilla roja. Veamos de cuántas maneras se pueden elegir estas dos columnas. Si la primera columna que tiene 1 casilla roja es la 1, entonces la otra puede ser la 3, la 4, la 5, la 6, la 7 o la 8. Son 6 posibilidades. De la misma forma, si la primera columna que tiene 1 casilla roja es la 2, entonces hay 5 posibilidades para elegir la otra; si la primera columna que tiene 1 casilla roja es la 3, hay 4 posibilidades; etcétera. En total hay 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21 maneras de elegir las dos columnas del tablero que tienen 1 casilla roja. Una vez elegidas estas columnas, hay 2 maneras de completar cada una de ellas (poner la casilla roja en la primera fila o en la segunda fila). Luego hay $21\cdot 2^2 =$ <u>84 posibilidades</u> para pintar el tablero con 2 casillas rojas.
Si hay 3 casillas rojas, tenemos que elegir 3 columnas del tablero entre las cuales no haya dos consecutivas. Si la primera columna es la 1, hay que elegir dos columnas más entre las últimas 6, y por el mismo argumento de antes la cantidad de maneras de hacerlo es 4 + 3 + 2 + 1 = 10. Si la primera columna es la 2 son 3 + 2 + 1 = 6; si la primera columna es la 3 son 2 + 1 = 4; y si la primera columna es la 4 hay una sola posibilidad (elegir las columnas 4, 6 y 8). Entonces hay $10+6+4+1=20$ maneras de elegir las columnas, y como cada una de ellas se puede completar de 2 maneras, hay $20\times2^3 =$ <u>160 posibilidades</u> para pintar el tablero con 3 casillas rojas.
Por último, si hay 4 casillas rojas las posibilidades para elegir las 4 columnas son 5:

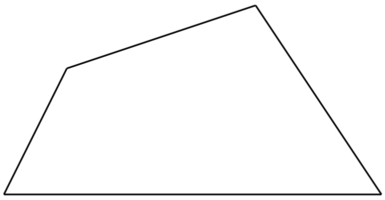
1 3 5 7 – 1 3 5 8 – 1 3 6 8 – 1 4 6 8 – 2 4 6 8.

Como para cada una de ellas tenemos 2 maneras de completar cada una de las 4 columnas, hay $5\times2^4 =$ <u>80 posibilidades</u> para pintar el tablero con 4 casillas rojas.

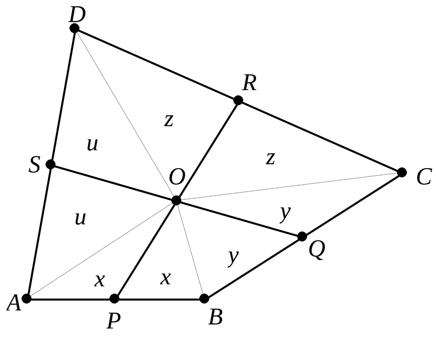
Finalmente la cantidad total de tableros es $1+16+84+160+80=341$.

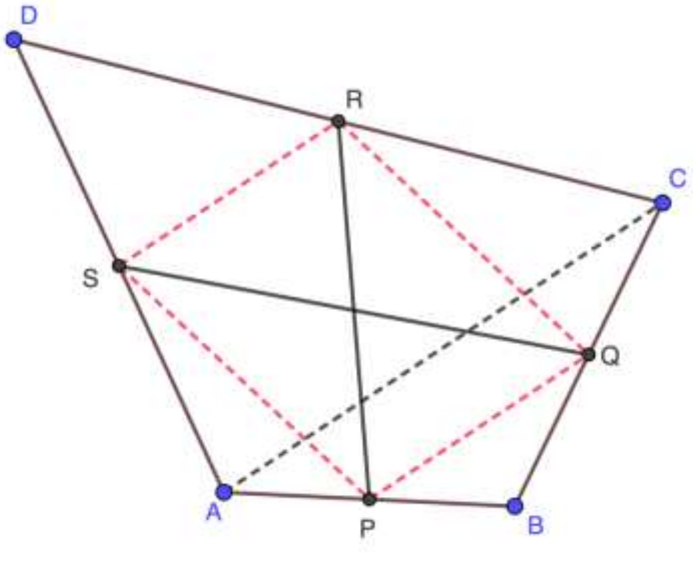
Problema 3
En un año que tiene 365 días, ¿cuál es la máxima cantidad de “martes 13” que puede haber?
Nota. Los meses de abril, junio, septiembre y noviembre tienen 30 días cada uno; febrero tiene 28 y todos los demás tienen 31 días.
Solución. Llamamos 0 al día de la semana en que cae el 13 de enero y los otros días de la semana 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Entonces los días 13 de los sucesivos meses ocurren en los días 0, 3, 3, 6, 1, 4, 6, 2, 5, 0, 3, 5. Cada uno de los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 están al menos una vez en un año y no más de tres veces. Por lo tanto debe haber al menos un martes 13 y no más de tres.

Problema 4
A Facundo y Luca les han regalado un pastel que tiene la forma del cuadrilátero de la figura.



Van a hacer dos cortes rectos sobre el pastel obteniendo así 4 porciones con forma de cuadrilátero. Luego Facundo se quedará con dos porciones que no compartan ningún lado; las otras dos serán para Luca. Indicar cómo pueden hacer los cortes para que ambos niños reciban la misma cantidad de pastel. Justificar por qué cortando de esa manera se logra el objetivo.
Solución. Sean *P*, *Q*, *R*, *S* los puntos medios de *AB*, *BC*, *CD*, *AD* respectivamente y *O* el punto de intersección de las rectas *PR* y *QS*. Unimos cada vértice del cuadrilátero *ABCD* con *O*. De este modo cada cuadrilátero pequeño (*BQOP*, *CROQ*, *DSOR*, *APOS*) queda dividido en dos triángulos. Pero esos triángulos, agrupados en parejas, también descomponen en dos cada uno de los triángulos *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOA*, y en este caso, cada triángulo queda dividido en dos partes de igual área, pues por ejemplo en *AOB*, el punto *P* es punto medio del lado *AB*, y por ende, *APO* y *BPO* son triángulos de igual área. Sean $2x$, $2y$, $2z$, $2u$ las áreas de *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOA* respectivamente. Entonces, uno de los chicos se llevará un área de $x+y+z+u$ y el otro, $u+x+y+z$. Los dos llevan lo mismo.





Solución alternativa. Cada recta de corte corta a dos lados opuestos en sus puntos medios.
Designemos como (*ABC*) al área de un triángulo *ABC*, y (*ABCD*) al área del cuadrilátero *ABCD*. Los segmentos *RP* y *SQ* se cortan en *O*.
Observemos:

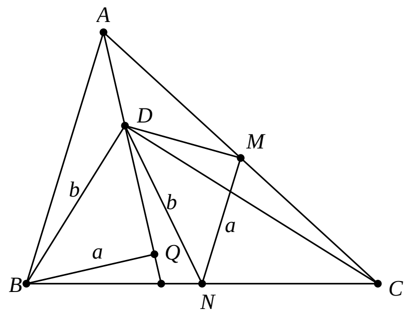
1.- Por ser *R* y *S* los puntos medios de los lados *CD* y *AD* del triángulo *ACD*, en los triángulos *DSR* y *DAC* vale que $SR = ½AC$. Además la altura del triángulo *DSR* respecto

del lado *SR* es igual a la mitad de la altura del triángulo *DAC* respecto del lado *AC*.
2.- Por lo tanto, (*DSR*)= ¼(*DAC*).
3.- Análogamente, el segmento *PQ* une los puntos medios de los lados *AB* y *CB* del triángulo *ABC*; por lo tanto, también será
(*BQP*) = ¼ (*ABC*).
Mirando ahora la otra diagonal, *BD*, también resultará que
(*CRQ*)= ¼(*CDB*) y
(*APS*) = ¼ (*ABD*)
Así pues, los segmentos *SR* y *PQ* son paralelos y miden lo mismo (la mitad del segmento *AC*) y el cuadrilátero *PQRS* es un paralelogramo, de diagonales *SQ* y *PR*. Por tanto,
(*ORS*) = (*OSP*) = (*OPQ*) = (*OQR*)
El área de las porciones de tarta de Facundo es (*ORDS*) + (*OPBQ*).
Tenemos:
(*ORDS*) + (*OPBQ*) = (*RDS*) + (*ORS*) + (*BQP*) + (*OPQ*) =
¼(*DAC*) + (*ORS*) + ¼ (*ABC*) + (*OPQ*) = ¼(*ABCD*) + (*OQR*) + (*OSP*) =
¼(*QCR*) +¼ (*SAP*) + (*OQR*) + (*OSP*) = (*OQCR*) + (*OSAP*),
que es el área de las porciones de tarta que se llevó Luca.

Problema 5
Beto escribió 36 enteros positivos consecutivos en el pizarrón. Calculó la suma de todos los dígitos de los 16 números más pequeños y escribió el resultado en color azul. Luego calculó la suma de todos los dígitos de los 10 números más grandes y escribió el resultado en color rojo. ¿Es posible que el número azul sea menor o igual que el número rojo? Si la respuesta es sí, mostrar cuáles pueden ser los números que escribió Beto; si la respuesta es no, explicar por qué es imposible.

Solución. Tales números no existen. Consideramos 36 números consecutivos arbitrarios $n, n+1, ..., n+35$. Veremos que la suma de los dígitos de los 16 primeros es mayor que la suma de los dígitos de los últimos 10. Sea $S(a)$ la suma de los dígitos de $a \in \mathbb{N}$. Observamos que si a aumenta en 20 entonces $S(a)$ aumenta a lo sumo 2, es decir, $S(a+20) \le S(a)+2$. Esto es claro si a es un número de un dígito. Sea a un número de por lo menos dos dígitos, y sea d su anteúltimo dígito. Si $d \le 7$ entonces $a+20$ tiene su anteúltimo dígito igual a $d+2$ y sus restantes dígitos son iguales a los respectivos dígitos de a, de modo que $S(a+20) = S(a)+2$. Si d es 8 o 9 entonces hay acarreo y el anteúltimo dígito de $a+20$ es $d-8$. Además exactamente uno de los restantes dígitos de a aumenta en 1 y, posiblemente, varios 9 consecutivos de a se transforman en 0. Luego $S(a)$ disminuye al menos 7, es decir, $S(a+20) \le S(a)-7 \le S(a)+2$.
Volviendo a $n, n+1, ..., n+35$, denotamos $S' = S(n)+...+S(n+15)$,
$S'' = S(n+26)+...+S(n+35)$. Por la observación
$S(n+26) \le S(n+6)+2, S(n+27) \le S(n+7)+2, ..., S(n+35) \le S(n+15)+2$, luego
$S'' \le S(n+6)+S(n+7)...+S(n+15)+20$. Ahora es suficiente verificar que la contribución $T = S(n)+S(n+1)+...+S(n+5)$ de los primeros 6 números a S' es más de 20; luego se deduce nuestra afirmación $S' > S''$.
Si n tiene más de un dígito, lo mismo ocurre con $n, n+1, ..., n+5$. Los últimos 6 dígitos contribuyen con al menos $0+1+...+5=15$; los primeros dígitos son al menos 1 cada uno. De modo que $T \ge 15+6 = 21 > 20$. Sea n un número de un dígito. Si $1 \le n \le 4$ entonces $n, n+1, ..., n+5$ son todos números de un dígito y $T \ge 1+2+...+6 = 21 > 20$. Si $5 \le n \le 7$ entonces entre $n, n+1, ..., n+5$ están 7, 8, 9 y por ende $T > 7+8+9 = 24 > 20$. Finalmente si $n=8$ y $n=9$ entonces $T = 27 > 20$ y $T = 24 > 20$ respectivamente.
Nota. Hay infinitos n tales que $S' = S''+1$, por ejemplo, $n = 10^k$ con $k \ge 2$.

Soluciones segundo nivel



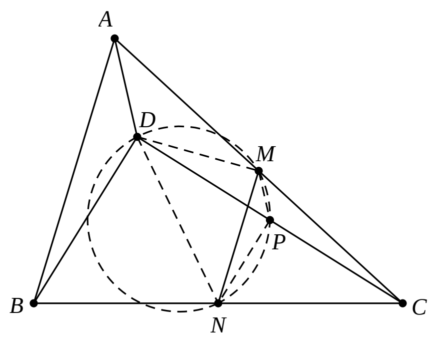
Problema 1. En el pizarrón están escritos los 99 números 1, 2, 3, …, 98, 99. Hay que pintar 50 de ellos de manera tal que la suma de dos números pintados nunca sea igual a 99 ni a 100. ¿De cuántas maneras se puede hacer?

Solución. Quitamos el número 50 y dividimos los restantes 98 números de 1 a 99 en 49 parejas con suma 100, es decir, $\{1,99\},\{2,98\}$, etc. El conjunto de números elegidos, *A*, puede contener a lo sumo un número de cada pareja, por hipótesis. Como $|A| = 50$ y el único número que no está en ninguna pareja es 50, sigue que *A* contiene un número de cada pareja y también a 50. Consideramos la pareja $\{49,51\}$. Como $49+50=99$ y $50 \in A$ vemos que $49 \notin A$ (no hay dos números de *A* que sumen 99). Luego $51 \in A$. Ahora consideramos $\{48,52\}$. Como $48+51=99$ y $51 \in A$ tenemos análogamente que $48 \notin A$ y $52 \in A$. Supongamos demostrado que $50+k \in A$ para un $k \in [1,48]$ y consideramos $\{49-k, 51+k\}$. Como $49-k+50+k=99$ y $50+k \in A$ se sigue que $49-k \notin A$ y $51+k \in A$. En conclusión, $A=\{50,51,...,99\}$ y es la única solución.

Problema 2. Sea *N* un entero positivo. Un divisor de *N* es *propio* si es mayor que 1 y menor que *N*. Por ejemplo,
2, 3, 6 y 9 son todos los divisores propios de 18.
Un entero positivo es *especial* si tiene al menos dos divisores propios y es múltiplo de todas las posibles diferencias entre dos de ellos. Determinar todos los enteros positivos que son especiales.

Solución. Sea *N* un entero positivo especial. Si *N* fuera impar, entonces todos sus divisores propios son impares y la diferencia de cualesquiera dos de ellos es par, pero esto no es posible porque un número impar no es divisible por un número par.
Concluimos que *N* es par. Sea *N*=2*k*. Es claro que *k*=1 y *k*=2 no cumplen porque *N*=2 y *N*=4 no son especiales. Entonces, tenemos que *k*>2, con lo cual 2 y *k* son divisores propios de 2*k* y se debería cumplir que $k-2$ es divisor de 2*k*. Como $k-2$ es divisor de $2(k-2)=2k-4$, entonces $k-2$ es divisor de la diferencia, que es 4. Por lo tanto, *k* es 3, 4 o 6. Finalmente, es fácil comprobar que *N*=6, *N*=8 y *N*=12 son especiales.

Problema 3. Sean *ABC* un triángulo y *D* un punto en su interior tal que $DBC = 60^{\circ}$ y $DCB = DAB = 30^{\circ}$.
Si *M* y *N* son los puntos medios de *AC* y *BC*, respectivamente, demostrar que $DMN = 90^{\circ}$.



Solución 1. Como *N* es punto medio de la hipotenusa *BC* del triángulo rectángulo *BDC*, tenemos que $NCD = NDC = 30^{\circ}$. Sea *P* el punto medio de *DC*, entonces *MP* es paralelo a *AD* y *MN* es paralelo a *AB*, entonces $NMP = BAD = 30^{\circ}$. Tenemos que $NMP = NDP = 30^{\circ}$, entonces el cuadrilátero *DMPN* es cíclico y en consecuencia, $DMN = DPN = 90^{\circ}$.

Solución 2. Sea $MN = a$, $AB = 2a$, $BD = BN = DN = NC = b$. Sea *Q* la proyección de *B* sobre la recta *AD*. Como $BAQ = 30^{\circ}$, entonces $BQ = a$. Por otro lado, como *MN* y *AB* son paralelos, tenemos que $ABC + MNB = 180^{\circ}$, o sea, $(DBA + 60^{\circ}) + (DNM + 60^{\circ}) = 180^{\circ}$, de donde $DBA + DNM = 60^{\circ}$.
Pero sabemos que $DBA + DBQ = 60^{\circ}$, entonces $DBQ = DNM$ y este hecho, junto a $DB = DN = b$ y $BQ = NM = a$, nos permite concluir que los triángulos *DBQ* y *DNM* son congruentes. Luego, $DMN = DQB = 90^{\circ}$.

Solución 3. Sea C' el simétrico de C respecto de DB. Entonces $DC'B = DCB = 30° = DAB$, por lo tanto, el cuadrilátero $ADBC'$ es cíclico y en consecuencia $C'AB = CDB = 90°$. Como M, D y N son los puntos medios de CA, CC' y CB respectivamente, DM y DN son paralelos a $C'A$ y AB respectivamente (bases medias). Luego $DMN = C'AB = 90°$, como queríamos probar.

Problema 4. En cada vértice de un polígono de 13 lados escribimos uno de los números 1, 2, 3, …, 12, 13, sin repetir. Luego, en cada lado del polígono escribimos la diferencia de los números de los vértices de sus extremos (el mayor menos el menor). Por ejemplo, si dos vértices consecutivos del polígono tienen los números 2 y 11, en el lado que determinan se escribe el número 9.
a) ¿Es posible numerar los vértices del polígono de modo que en los lados sólo se escriban los números 3, 4 y 5?
b) ¿Es posible numerar los vértices del polígono de modo que en los lados sólo se escriban los números 3, 4 y 6?
Solución. a) Supongamos que hemos numerado los trece vértices del polígono de modo que los números de los lados tomen valores 3, 4 o 5. Separamos los números del conjunto {1,2,3,….,12,13} en dos bloques: Por una parte, tendremos X = {1,2,3,11,12,13}, y por otra, Y = {4,5,6,7,8,9,10}. Ninguna pareja de números de X determinarán un lado del polígono, pues si a, b están en X, resulta que $|a – b|$ es menor que 3 o mayor que 5. Así que cada vértice numerado con un número de X estará unido (formando lado) con dos vértices de Y: tendremos entonces 12 lados con un vértice en X y otro en Y. Como el polígono tiene 13 lados, exactamente uno de ellos tiene sus dos extremos numerados con números de Y. Ahora bien, el vértice 4 solamente puede unirse, para formar un lado, con el vértice 1 de X, mientras que el vértice 10 solamente puede formar lado con el vértice 13 de X. Pero entonces debe haber dos lados diferentes (4, a) y (10, b), con sus vértices 4, a, 10 y b en Y, y estos dos lados son diferentes, ya que (4, 10) NO pueden determinar un lado. Se sigue por lo tanto que no es posible una numeración de los vértices según la cual los números de los lados tomen únicamente los valores 3, 4 y 5.
b) Sí, es posible. Una forma puede ser 1, 4, 10, 13, 9, 12, 8, 11, 7, 3, 6, 2 y 5 en sentido horario.

Problema 5. Demostrar que existen 100 enteros positivos distintos $n_1, n_2, ..., n_{100}$ tales que $\dfrac{n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 + ... + n_{100}^3}{100}$ es un cubo perfecto.
Solución. Comencemos notando que $6^3=5^3+4^3+3^3$ (usaremos esta igualdad en el paso inductivo). Por otro lado, tenemos que $100=4^3+3^3+2^3+1^3$.
Demostraremos por inducción que para cada número par $k \geq 4$ existen enteros positivos distintos $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ tales que la suma de sus cubos es igual a 100 veces un cubo perfecto. (Haciendo k=100 conseguimos probar lo que nos pide el problema).
Para k=4 tomamos los números 4, 3, 2, 1. Supongamos que para algún $k \geq 4$ par tenemos enteros positivos $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k$ tales que $n_1^3 + n_2^3 + \ldots + n_k^3 = 100t^3$. Multiplicamos a ambos lados por 6^3 y utilizamos la igualdad $(6n_1)^3=(5n_1)^3+(4n_1)^3+(3n_1)^3$, con lo cual obtenemos

$$(3n_1)^3+(4n_1)^3+(5n_1)^3+ (6n_2)^3 +\ldots+(6n_k)^3=100(6t)^3$$

De esta forma hemos conseguido k+2 enteros positivos $3n_1<4n_1<5n_1<6n_2<6n_3< \ldots <6n_k$ tales que la suma de sus cubos es 100 veces un cubo perfecto. Lo cual demuestra el paso inductivo.