XXXIII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

ESPAÑA ~ PORTUGAL
La Rábida Monte Gordo

Martes, 25 de septiembre de 2018

Primer día

1. Para cada número natural $n \geq 2$, hallar las soluciones enteras del siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_1 = (x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n)^{2018}$$
$$x_2 = (x_1 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n)^{2018}$$
$$\vdots$$
$$x_n = (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1})^{2018}$$

2. Sea ABC un triángulo tal que $\angle BAC = 90°$ y $BA = CA$. Sea M el punto medio de BC. Un punto $D \neq A$ es elegido en la semicircunferencia de diámetro BC que contiene a A. La circunferencia circunscrita al triángulo DAM intersecta a las rectas DB y DC en los puntos E y F, respectivamente. Demostrar que $BE = CF$.

3. En un plano tenemos n rectas sin que haya dos paralelas, ni dos perpendiculares, ni tres concurrentes. Se elige un sistema de ejes cartesianos con una de las n rectas como eje de las abscisas. Un punto P se sitúa en el origen de coordenadas del sistema elegido y comienza a moverse a velocidad constante por la parte positiva del eje de las abscisas. Cada vez que P llega a la intersección de dos rectas, sigue por la recta recién alcanzada en el sentido que permite que el valor de la abscisa de P sea siempre creciente. Demostrar que se puede elegir el sistema de ejes cartesianos de modo que P pase por puntos de las n rectas.

   Nota: El eje de las abscisas de un sistema de coordenadas del plano es el eje de la primera coordenada o eje de las x.

Duración: 4 horas y 30 minutos

Cada problema vale 7 puntos

Miércoles, 26 de septiembre de 2018

Segundo día

4. Un conjunto X de enteros positivos es *ibérico* si X es un subconjunto de $\{2, 3, 4, \ldots, 2018\}$, y siempre que m y n pertenezcan a X, entonces el $\text{mcd}(m, n)$ pertenece también a X. Un conjunto ibérico es *olímpico* si no está contenido en ningún otro conjunto ibérico. Encontrar todos los conjuntos ibéricos olímpicos que contienen el número 33.

5. Sea n un entero positivo. Para una permutación $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de los números $1, 2, \ldots, n$, definimos
$$b_k = \min_{1 \leq i \leq k} a_i + \max_{1 \leq j \leq k} a_j$$
para cada $k = 1, 2, \ldots, n$.

   Decimos que la permutación $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es *guadiana* si la sucesión $b_1, b_2, \ldots, b_n$ no tiene dos elementos consecutivos iguales. ¿Cuántas permutaciones guadianas existen?

6. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AC > AB > BC$. Las mediatrices de AC y AB intersectan a la recta BC en D y E, respectivamente. Sean P y Q puntos distintos de A sobre las rectas AC y AB, respectivamente, tales que $AB = BP$ y $AC = CQ$, y sea K la intersección de las rectas EP y DQ. Sea M el punto medio de BC. Demostrar que $\angle DKA = \angle EKM$.

Duración: 4 horas y 30 minutos

Cada problema vale 7 puntos