SEGUNDO PRETORNEO 2011
JUVENIL

1. Alrededor de una circunferencia están escritos los números enteros desde 1 hasta 2010 de manera que si recorremos la circunferencia en sentido horario los números crecen y decrecen alternadamente. ¿Puede ocurrir que todas las diferencias entre dos números consecutivos de la circunferencia sean impares? Si la respuesta es sí, dar un ejemplo de tal distribución; si la respuesta es no, explicar el porqué.

4 PUNTOS

2. Un rectángulo está dividido mediante 10 rectas horizontales y 10 rectas verticales en 121 casillas rectangulares. Si 111 de estas casillas tienen perímetros enteros, demostrar que todas las 121 casillas tienen perímetros enteros.

5 PUNTOS

3. Construir un cuadrilátero que no sea un cuadrado y cumpla simultáneamente las siguientes dos condiciones:
Cada diagonal divide al cuadrilátero en dos triángulos isósceles.
Las dos diagonales dividen al cuadrilátero en 4 triángulos isósceles.

5 PUNTOS

4. Los gusanos crecen a razón de 1 metro por hora. Cuando llegan a 1 metro de longitud dejan de crecer. Un gusano de 1 metro se puede partir en dos nuevos gusanos de longitudes arbitrarias que suman entre las dos 1 metro. Mostrar que es posible, usando repetidas veces esta operación, comenzar con un solo gusano de 1 metro y finalizar con 4 gusanos de 1 metro cada uno, empleando en total menos de 1 hora.

5 PUNTOS

SEGUNDO PRETORNEO 2011
MAYOR

1. Alrededor de una circunferencia hay 100 puntos blancos. Sea *k* un entero, con $2 \leq k \leq 50$. En cada movida, se elige un bloque de *k* puntos adyacentes tales que el primero y el último sean blancos, y se pintan esos dos puntos de negro. Determinar para qué valores de *k* es posible que al cabo de 50 movidas todos los 100 puntos estén pintados de negro .

4 PUNTOS

2. Los gusanos crecen a razón de 1 metro por hora. Cuando llegan a 1 metro de longitud dejan de crecer. Un gusano de 1 metro se puede partir en dos nuevos gusanos de longitudes arbitrarias que suman entre las dos 1 metro. Mostrar que es posible, usando repetidas veces esta operación, comenzar con un solo gusano de 1 metro y finalizar con 10 gusanos de 1 metro cada uno, empleando en total menos de 1 hora.

5 PUNTOS

3. Se tiene un pentágono con la siguiente propiedad: hay cuatro vértices tales que las perpendiculares trazadas desde esos cuatro vértices hacia los correspondientes lados opuestos pasan las cuatro por un mismo punto. Demostrar que la perpendicular trazada desde el quinto vértice al lado opuesto también pasa por ese punto.

5 PUNTOS

4. Un dragón le da 100 monedas a un caballero que tiene prisionero. La mitad de las monedas son mágicas, pero sólo el dragón sabe cuáles son. Cada día, el caballero tiene que dividir las 100 monedas en dos pilas no necesariamente del mismo tamaño. Si algún día las dos pilas tienen el mismo número de monedas mágicas o las dos pilas tienen el mismo número de monedas no mágicas, el caballero se gana la libertad. Determinar si el caballero puede ganar su libertad en 50 días o menos. ¿Y en 25 días o menos?

5 PUNTOS