PRETORNEO 2020
Nivel Juvenil

1. Inicialmente, en el pizarrón está escrito un número entero positivo. El número del pizarrón se cambia por otro número, mediante una de tres operaciones permitidas:

- Multiplicar el número del pizarrón por 3 y al resultado sumarle 1.
- Si el número del pizarrón es par, dividirlo por 2.
- Si el número del pizarrón es impar, restarle 1 y al resultado dividirlo por 2.

Determinar si comenzando en 1 se puede obtener el número 2020 aplicando sucesivamente una cantidad finita de estas operaciones. ¿Y el 2021?

4 PUNTOS

2. Un mago coloca formando una fila las 52 cartas de un mazo, boca abajo, pero él sabe qué lugar ocupa cada carta. En cada etapa, una persona de la audiencia elige un entero positivo k, comprendido entre 1 y el número de cartas que haya en ese momento, y a continuación el mago quita de la fila la carta de la posición k desde la derecha o desde la izquierda, a elección del mago. Antes de empezar, el mago anuncia que la última carta que quedará en la fila luego de 51 etapas será el tres de corazones. Determinar para qué ubicaciones iniciales del tres de corazones puede el mago garantizar el éxito de su truco.

5 PUNTOS

3. Se tienen 100 fichas, numeradas de 1 a 100, en una fila. Hay dos movidas lícitas:
Intercambiar dos fichas adyacentes (que estén una al lado de la otra), que cuesta un dólar.
Intercambiar dos fichas que tienen exactamente 3 fichas entre medio, que es gratis.
Determinar la menor cantidad de dólares necesaria para reordenar las 100 fichas en el orden inverso al que tenían al comienzo.

5 PUNTOS

4. Alrededor de una circunferencia se han marcado 100 puntos y a cada uno de ellos se le ha asignado el cuadrado de un número entero. Se sabe que la suma de los números asignados a 3 puntos consecutivos es siempre múltiplo de 9. Determinar si es imprescindible que cada uno de los 100 enteros escritos sea múltiplo de 3.

6 PUNTOS

PRETORNEO 2020
Nivel Mayor

1. Alrededor de una circunferencia se han marcado 1000 puntos y a cada uno de ellos se le ha asignado el cuadrado de un número entero. Se sabe que la suma de los números asignados a 41 puntos consecutivos es siempre múltiplo de 41^2. Determinar si es imprescindible que cada uno de los 1000 enteros escritos sea múltiplo de 41.

4 PUNTOS

2. Consideramos una circunferencia de centro *O* y dos puntos *A* y *C* en la circunferencia. Sea *P* un punto que se mueve en un arco $\overset{\frown}{AC}$ de la circunferencia y sean *X*, *Y* los respectivos puntos medios de los segmentos *PA* y *PC*. Denominamos *H* al ortocentro del triángulo *OXY*. Demostrar que *H* es un punto fijo.
ACLARACIÓN: El ortocentro de un triángulo es el punto de intersección de sus alturas.

5 PUNTOS

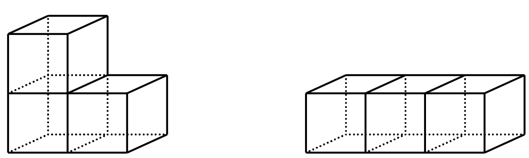
3. Inicialmente, en el pizarrón está escrito un número entero positivo. El número del pizarrón se cambia por otro número, mediante una de tres operaciones permitidas:

- Multiplicar el número del pizarrón por 3 y al resultado sumarle 1.
- Si el número del pizarrón es par, dividirlo por 2.
- Si el número del pizarrón es impar, restarle 1 y al resultado dividirlo por 2.

Demostrar que comenzando en 1 se puede obtener el número entero positivo que se desee aplicando sucesivamente una cantidad finita de estas operaciones.

5 PUNTOS

4. Beto tiene abundante cantidad de dos clases de piezas: unos coditos formados por un bloque de $1\times2\times2$ cubitos unitarios al que se le quitó un cubito (le quedan tres cubitos unitarios) y unos ladrillitos de $1\times1\times3$ formados, cada uno, por tres cubitos unitarios, como se ve en la figura..



Beto construye uniendo estas piezas y sin dejar huecos un ladrillo con cada una de sus dimensiones mayor o igual que 2. Demostrar que puede hacerlo utilizando exclusivamente coditos, sin usar ningún ladrillito.

6 PUNTOS