XVIII OLIMPÍADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2012

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
<u>Justifica cada una de tus respuestas.</u>
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo.

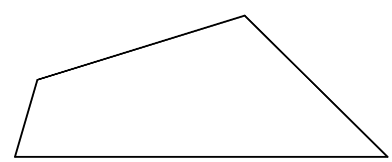
PROBLEMA 1
Pablo dice: "Al día de mi cumpleaños le sumo 2 y multiplico el resultado por 2. Al número obtenido le sumo 4 y multiplico el resultado por 5. Al nuevo número obtenido le sumo el número del mes de mi cumpleaños (por ejemplo, si es junio, le sumo 6) y obtengo 342."
¿Cuál es la fecha del cumpleaños de Pablo? Dar todas las posibilidades.

PROBLEMA 2
Llamamos $S(n)$ a la suma de las cifras del entero n. Por ejemplo, $S(327)=3+2+7=12$.
Hallar el valor de

$$A=S(1)-S(2)+S(3)-S(4)+\ldots+S(2011)-S(2012).$$

(A tiene 2012 términos).

PROBLEMA 3
De un cuadrilátero de papel como el de la figura, hay que recortar un nuevo cuadrilátero cuya área sea igual a la mitad del área del cuadrilátero original. Solo se puede doblar una o más veces y cortar por algunas de las líneas de los dobleces.
Describir los dobleces y los cortes y justificar que el área es la mitad.



PROBLEMA 4
Pedro tiene 111 fichas azules y 88 fichas blancas. Hay una máquina que por cada 14 fichas azules entrega 11 fichas blancas y por cada 7 fichas blancas entrega 13 azules. Decidir si Pedro puede lograr, mediante sucesivas operaciones con la máquina, aumentar en 33 el número total de fichas, de modo que la cantidad de fichas azules sea igual a $\frac{5}{3}$ de la cantidad de fichas blancas.
Si se puede, indicar cómo hacerlo. Si no se puede, indicar porqué.

PROBLEMA 5
En una reunión hay 12 personas. Se sabe que para cada dos personas A y B de la reunión hay (al menos) otra persona C de la reunión que es amiga de A y de B. Determinar el mínimo número de pares de amigos que hay en la reunión.
Cada persona puede integrar varios pares. Si X es amigo de Y entonces Y es amigo de X.

XVIII OLIMPÍADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2012

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo.

PROBLEMA 1
Un número de cuatro cifras es *tartamudo* si tiene las dos primeras cifras iguales entre sí y las dos últimas cifras iguales entre sí, por ejemplo 3311 y 2222 son números tartamudos. Hallar todos los números tartamudos de cuatro cifras que son cuadrados perfectos.

PROBLEMA 2
Se tienen dos octógonos regulares de cartulina. Los vértices de cada octógono se numeran de 1 a 8, en cualquier orden (el orden para un octógono puede ser diferente al del otro). Luego los octógonos se superponen, de modo que cada vértice de uno quede en contacto con un vértice del otro. Los números de los vértices en contacto se multiplican, y los 8 productos obtenidos se suman.
Demostrar que, cualquiera sea el orden en que hayan sido numerados los vértices, siempre es posible superponer los octógonos de manera que esa suma sea mayor o igual que 162.

PROBLEMA 3
En el triángulo ABC, se verifica que $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ y $\widehat{A} > 90^{\circ}$. Llamamos M al punto medio de BC. La perpendicular por C al lado AC corta a la recta AB en el punto D. Demostrar que $A\widehat{M}B = D\widehat{M}C$.

PROBLEMA 4
Se dan seis puntos de manera que no haya tres sobre una misma recta y que las longitudes de los segmentos determinados por estos puntos sean todas distintas. Consideramos todos los triángulos que tienen sus vértices en estos puntos. Demostrar que hay un segmento que es a la vez el lado más corto de uno de esos triángulos y el lado más largo de otro.

PROBLEMA 5
Hay 27 cajas ubicadas en una fila; cada una contiene por lo menos 12 bolitas. La operación permitida es transferir una bolita desde una caja hacia su vecina de la derecha, siempre y cuando dicha vecina contenga más bolitas que la caja desde la que se hará la transferencia. Diremos que una distribución inicial de las bolitas es *feliz* si es posible lograr, mediante una sucesión de operaciones permitidas, que todas las bolitas queden en una misma caja. Determinar cuál es el menor número total de bolitas con el que se puede tener una distribución inicial feliz.