XXIII^a OLIMPÍADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2017

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 27 de mayo.

PROBLEMA 1
A cada número de tres dígitos Matías le sumó el número que se obtiene invirtiendo sus dígitos. Por ejemplo, al número 927 le sumó el 729. Calcular en cuántos casos el resultado de la suma de Matías es un número con todos sus dígitos impares.

PROBLEMA 2
¿Es posible pintar 33 casillas de un tablero de 9×9 de forma que cada fila y cada columna del tablero tenga como máximo 4 casillas pintadas, pero si además pintamos cualquier otra casilla aparece alguna fila o columna que tiene 5 casillas pintadas?

PROBLEMA 3
Sea *ABCD* un rombo de lados $AB = BC = CD = DA = 13$. Sobre el lado *AB* se construye el rombo *BAFE*, exterior al *ABCD* y tal que el lado *AF* es paralelo a la diagonal *BD* del *ABCD*. Si el área del *BAFE* es igual a 65, calcular el área del *ABCD*.

PROBLEMA 4
Sea n un entero par mayor que 2. Sobre los vértices de un polígono regular de n lados se pueden colocar fichas rojas o azules. Dos jugadores, A y B, juegan alternándose turnos del siguiente modo: cada jugador, en su turno, elige dos vértices que no tengan fichas y coloca en uno de ellos una ficha roja y en el otro una ficha azul. El objetivo de A es conseguir que haya tres vértices consecutivos con fichas del mismo color. El objetivo de B es impedir que esto suceda. Al comienzo del juego no hay fichas en ninguno de los vértices.
Demostrar que independientemente de quien empiece a jugar, el jugador B siempre podrá conseguir su objetivo.

PROBLEMA 5
Diremos que dos números enteros positivos a y b forman una *pareja adecuada* si $a+b$ divide a ab (su suma divide a su multiplicación). Hallar 24 números enteros positivos que se puedan distribuir en 12 parejas adecuadas, y de modo que cada número entero figure en una sola pareja y el mayor de los 24 números sea lo menor posible.

XXIII^a OLIMPÍADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2017

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 27 de mayo.

PROBLEMA 1
Decimos que un número entero positivo es *ascendente* si sus cifras leídas de izquierda a derecha están en orden estrictamente creciente. Por ejemplo, 458 es ascendente y 2339 no lo es.
Hallar el mayor número ascendente que es múltiplo de 56.

PROBLEMA 2
Varios números reales diferentes están escritos en el pizarrón. Si a, b, c son tres de estos números, distintos entre sí, al menos una de las sumas $a+b, b+c, c+a$ también es uno de los números del pizarrón. ¿Cuál es la mayor cantidad de números que pueden estar escritos en el pizarrón?

PROBLEMA 3
En un cuadrilátero $ABCD$ se cumple que $ABC = ADC = 90^o$ y BCD es obtuso. En el interior del cuadrilátero se ubica el punto P tal que $BCDP$ es un paralelogramo. La recta AP corta al lado BC en M. Además $BM = 2$, $MC = 5$ y $CD = 3$.
Determinar la longitud de AM.

PROBLEMA 4
Consideramos todos los números de 7 dígitos que se obtienen permutando de todas las maneras posibles los dígitos de 1234567. ¿Cuántos de ellos son divisibles entre 7?

PROBLEMA 5
Ababa juega con una palabra formada por las letras de su nombre y se ha puesto ciertas reglas:
Si encuentra una A seguida inmediatamente de una B las puede sustituir por BAA.
Si encuentra dos B consecutivas las puede borrar.
Si encuentra tres A consecutivas las puede borrar.
Ababa empieza con la palabra ABABABAABAAB. Con las reglas anteriores, ¿cuántas letras tiene la palabra más corta a la que puede llegar? ¿Por qué no puede llegar a una palabra más corta?