XXX^a OLIMPÍADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2024

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 30 de mayo.

PROBLEMA 1
Se tiene un tablero cuadriculado de 4×8 dividido en 32 casillas de 1×1 y fichas de 1×1, 2×2, 3×3 y 4×4. Se quiere cubrir totalmente el tablero usando exactamente n de estas fichas.

a) ¿Es posible hacerlo si $n = 19$?
b) ¿Es posible hacerlo si $n = 14$?
c) ¿Es posible hacerlo si $n = 7$?

En cada caso, si la respuesta es sí, mostrar una forma de cubrir el tablero, y si la respuesta es no, explicar por qué es imposible.
Aclaración: Las fichas no se pueden superponer ni salirse del tablero.

PROBLEMA 2
Decimos que un entero positivo n es *bueno* si el resultado de multiplicar los primeros n enteros positivos impares usa solamente los dígitos 1, 3, 5 y 9. Por ejemplo, $n = 3$ es bueno, porque $1\cdot 3\cdot 5 = 15$, pero $n = 4$ no lo es, porque $1\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 105$.
Hallar todos los números buenos.

PROBLEMA 3
Ana escribe una lista infinita de números con el siguiente procedimiento. El primer número de la lista es un entero positivo a elegido por Ana. A partir de allí, cada número de la lista se obtiene calculando la suma de todos los números enteros entre 1 y el último número escrito. Por ejemplo, si $a = 3$, la lista de Ana comienza con

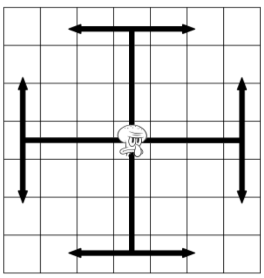
$$3, 6, 21, 231, \dots$$

porque $1 + 2 + 3 = 6$, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, $1 + 2 + 3 + \dots + 21 = 231$.
Determinar si es posible que todos los números de la lista de Ana sean pares.

PROBLEMA 4
Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo, y sean M, N, P, Q los puntos medios de los lados AB, CD, BC, DA respectivamente. La recta MN corta a los segmentos AP y CQ en X e Y respectivamente. Supongamos que $MX = NY$.

Demostrar que área($ABCD$) = 4·área($BXDY$).

PROBLEMA 5
Un *calamardo* es una pieza que se mueve en un tablero de la siguiente manera: avanza tres casillas en una dirección y a continuación, dos casillas en una dirección perpendicular. Por ejemplo, en la siguiente figura, haciendo una movida el calamardo se puede mover a cualquiera de las 8 casillas indicadas con las flechas.



Inicialmente, hay un calamardo en cada una de las 35 casillas de un tablero de 5×7. Al mismo tiempo, cada uno de ellos hace exactamente una movida. ¿Cuál es el menor número posible de casillas vacías después de esas movidas?