XXXIV TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
PRIMAVERA 2013 DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL JUVENIL

1. En el pizarrón están escritos algunos números enteros positivos. La suma de cualesquiera dos de ellos es una potencia de 2 con exponente entero (como 2, 4, 8, …). Determinar el máximo número de enteros distintos que puede haber en el pizarrón. 4 PUNTOS

2. Hay 20 chicos de pie en una fila, 10 son varones y 10 son mujeres. Cada varón cuenta cuántos chicos (varones y mujeres) están a su derecha. Cada mujer cuenta cuántos chicos (varones y mujeres) están a su izquierda. Demostrar que la suma de los números que contaron las mujeres es igual a la suma de los números que contaron los varones. 4 PUNTOS

3. Se tiene un tablero de 19×19. Determinar si es posible colorear algunas casillas de modo que todos los cuadrados de 10×10 contenidos en el tablero contengan una cantidad diferente de casillas coloreadas. 5 PUNTOS

4. Alrededor de una circunferencia están escritos 1000 números reales distintos de cero, que son alternadamente negros y blancos. Cada número negro es igual a la suma de sus dos vecinos blancos, y cada número blanco es igual a la multiplicación de sus dos vecinos negros. Determinar los posibles valores de la suma total de los 1000 números. 5 PUNTOS

5. Diremos que un punto del plano es un *nodo* si sus dos coordenadas son enteras. Consideramos un triángulo que tiene sus tres vértices en nodos y contiene exactamente dos nodos en su interior . Demostrar que la recta que pasa por esos dos nodos o bien pasa por un vértice del triángulo o bien es paralela a un lado del triángulo. 6 PUNTOS

6. Sea *ABC* un triángulo rectángulo en *C*; sea *I* su incentro y B_0, A_0 los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los catetos *AC*, *BC* respectivamente. La perpendicular a *AI* trazada por A_0 y la perpendicular a *BI* trazada por B_0 se cortan en *P*. Demostrar que las rectas *CP* y *AB* son perpendiculares.

ACLARACIÓN: El incentro de un triángulo es el centro de la circunferencia tangente a los tres lados y se obtiene como intersección de las bisectrices. 8 PUNTOS

7. Dos equipos, *A* y *B*, juegan un torneo de ping pong. El equipo *A* tiene *m* integrantes y el equipo *B* tiene *n* integrantes, con $m \neq n$. Hay una sola mesa de ping pong y el torneo se organiza de la siguiente manera. Dos integrantes de distintos equipos comienzan a jugar, mientras que los otros jugadores forman una fila, esperando su turno para jugar. Después de cada partido, el primer jugador de la fila reemplaza al miembro de su mismo equipo y juega con el otro jugador (que ya había jugado el partido anterior). El jugador que fue reemplazado se coloca al final de la fila. Demostrar que cada par de integrantes de equipos opuestos en algún momento jugarán uno contra el otro. 9 PUNTOS

XXXIV TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
PRIMAVERA 2013 DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL MAYOR

1. En el pizarrón están escritos algunos números enteros positivos. La suma de cualesquiera dos de ellos es una potencia de 2 con exponente entero (como 2, 4, 8, …). Determinar el máximo número de enteros distintos que puede haber en el pizarrón. 3 PUNTOS

2. Inicialmente hay un varón y una mujer sentados en un banco largo. A continuación, otros 20 chicos se sientan, uno por uno, en el mismo banco; cada uno se ubica entre dos chicos que ya están sentados con anterioridad. Diremos que una mujer es *valiente* si se sienta entre dos varones, y diremos que un varón es *valiente* si se sienta entre dos mujeres. Al final resulta que los varones y las mujeres quedaron alternados en el banco. Determinar si con esta información es posible conocer con certeza el número de chicos valientes (varones más mujeres). 4 PUNTOS

3. Diremos que un punto del plano es un *nodo* si sus dos coordenadas son enteras. Consideramos un triángulo que tiene sus tres vértices en nodos y contiene por lo menos dos nodos en su interior. Demostrar que hay dos nodos interiores al triángulo tales que la recta que pasa por ellos o bien pasa por un vértice del triángulo o bien es paralela a un lado del triángulo. 6 PUNTOS

4. Los números enteros desde 1 hasta 100 están escritos alrededor de una circunferencia, no necesariamente en orden creciente. Determinar si puede ocurrir que los valores absolutos de las diferencias entre dos números consecutivos sean todos mayores o iguales que 30 y menores o iguales que 50. 6 PUNTOS

5. En el plano, inicialmente sin colorear, se eligen tres puntos y se los coloreas de rojo, azul y amarillo. A continuación en cada paso se eligen dos puntos de colores distintos. Luego se colorea otro punto con el tercer color de modo que estos tres puntos formen un triángulo equilátero con sus vértices coloreados en “rojo, azul, amarillo” en el sentido de las agujas del reloj. Un punto que ya fue marcado se puede marcar nuevamente, de modo que ese punto puede tener más de un color. Demostrar que para cualquier número de pasos, todos los puntos que contienen el mismo color pertenecen a la misma recta. 7 PUNTOS

6. Se tienen cinco números reales positivos distintos. Se sabe que la suma total de los cuadrados de estos números es igual a la suma de diez productos de pares de esos mismos números.

a) Demostrar que podemos elegir tres números tales que no sea posible construir un triángulo con las longitudes de sus lados iguales a esos tres números. 4 PUNTOS

b) Demostrar que la cantidad de tales conjuntos de tres números es por lo menos seis (los conjuntos de tres números que tienen los mismos números en otro orden se consideran el mismo conjunto). 5 PUNTOS

7. El rey decidió reducir su gabinete que consiste de 1000 genios. Los colocó en una fila y les colocó sombreros con números enteros de 1 a 1001, no necesariamente en ese orden (escondió un sombrero). Cada genio puede ver los números de los sombreros de todos los que están adelante suyo, pero no puede ver el propio ni los que están detrás suyo. Por orden del rey, comenzando por el final de la fila, cada genio dice un entero de 1 a 1001 de modo que todos los genios lo oigan. Ningún número se puede repetir dos veces. Al final, cada genio que no haya dicho el número de su propio sombrero es expulsado del gabinete. Los genios conocen las reglas y pueden desarrollar entre ellos estrategias antes de que les repartan los sombreros.

a) Determinar si los genios pueden desarrollar una estrategia que les garantice que más de 500 de ellos permanezcan en el gabinete. 5 PUNTOS

b) Determinar si los genios pueden desarrollar una estrategia que les garantice que por lo menos 999 de ellos permanezcan en el gabinete. 7 PUNTOS