XLV TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
PRIMAVERA 2024 DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL JUVENIL

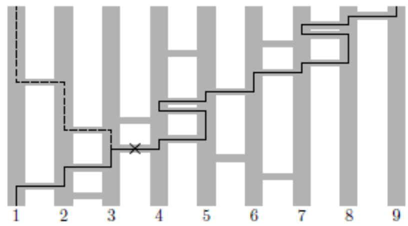
1. En una clase de educación física había 12 estudiantes, todos de distinta estatura. El entrenador los dividió en dos equipos de 6 estudiantes cada uno y anotó la suma de las estaturas de cada equipo. Repitió esto hasta totalizar 10 rondas: en cada ronda los dividió en dos equipos de 6 y sumó las estaturas de cada equipo. Cada división fue distinta de las otras 9. ¿Puede ocurrir que en las 10 divisiones las sumas de las estaturas de los dos equipos sean iguales? 4 PUNTOS

2. Pedro dibujó un eneágono convexo (polígono de 9 lados). Demostrar que entre los vértices del eneágono dibujado hay tres vértices que forman un triángulo obtuso y, además, ninguno de los lados de ese triángulo coincide con un lado del eneágono. 5 PUNTOS

3. Se tiene una pila de 100 piedras. Hay dos jugadores. El primero saca una piedra de la pila, a continuación, el segundo saca 1 o 2 piedras de la pila, luego el primero saca 1, 2 o 3 piedras, a continuación el segundo saca 1, 2, 3 o 4 piedras, y así siguiendo. Gana el jugador que saca la última piedra de la pila. ¿Cuál de los dos jugadores se puede asegurar la victoria sin importar la estrategia de su oponente?
7 PUNTOS

4. Tomy elige una fracción irreducible positiva $x = \frac{m}{n}$ y la mantiene en secreto. Para adivinar la fracción de Tomy se puede hacer repetidas veces la siguiente operación: elegir una fracción positiva y, menor que 1, y Tomy dirá cuál es el numerador de la fracción irreducible igual a la suma $x + y$. Mostrar cómo se puede determinar x con certeza usando dos operaciones. 7 PUNTOS

5. Hay 9 pilares en una fila. También hay palos horizontales en algunos lugares, que conectan dos pilares vecinos, de modo que no queden dos de estos palos a la misma altura. Un escarabajo camina hacia arriba y cada vez que llega a un palo, camina por el palo hasta el pilar vecino y luego continúa caminado hacia arriba. Se sabe que si el escarabajo comienza desde la base del primer pilar entonces finaliza su caminata al tope del último (noveno) pilar. ¿Es siempre posible retirar uno de los palos de modo que el escarabajo finalice al tope del quinto pilar? (Por ejemplo, si los palos están ubicados como en la figura, entonces el escarabajo seguiría la línea negra. Si se quitara el tercer palo del camino del escarabajo, entonces el escarabajo continuaría su camino por la línea punteada.) 9 PUNTOS



6. En la circunferencia que para por los vértices del triángulo *ABC* marcamos los puntos *M* y *N*, *P* y *Q*. Estos puntos son los puntos medios de los arcos de circunferencia BAC, CBA, BC y CA respectivamente. La circunferencia ω_1 es tangente al lado *BC* en el punto A_1 y también es tangente a las rectas *AC* y *AB*. La circunferencia ω_2 es tangente al lado *AC* en el punto B_1 y también tangente a las rectas *BA* y *BC*. Resultó que A_1 pertenece al segmento *NP*. Demostrar que B_1 pertenece al segmento *MQ*. 10 PUNTOS

7. Hay 99 tarjetas y cada una tiene escrito un número real distinto. La suma de todos los números es un número irracional. Una pila de 99 tarjetas se dice *desafortunado* si para todo *k* desde 1 hasta 99 la suma de los *k* números de las *k* cartas de la parte de arriba de la pila es irracional. Beto calculó el número de maneras posibles de poner las cartas en una pila desafortunada. ¿Cuál es el número mínimo que pudo obtener Beto?
12 PUNTOS

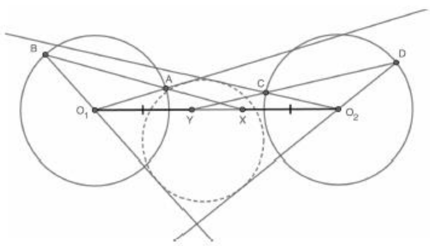
XLV TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
PRIMAVERA 2024 DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL MAYOR

1. Halar todos los pares de enteros positivos m y n tales que $m!! = n!$. (El factorial $x!$ es la multiplicación de todos los enteros positivos menores o iguales que x. El doble factorial $x!!$ es la multiplicación de todos los enteros positivos menores o iguales que x que tienen igual paridad que x. Por ejemplo, $5!! = 15$, $6!! = 48$.)
4 PUNTOS

2. Hay una cantidad finita de círculos (planos) ubicados en el espacio tridimensional. Los círculos se pueden cortar entre sí, pero ninguno de ellos contiene el centro de otro de ellos. En el centro de cada círculo hay una lámpara encendida. La lámpara irradia luz en todas las direcciones del espacio ¿Puede ocurrir que todo rayo de luz emitido desde el centro de cualquier círculo ilumine a otro círculo? 6 PUNTOS

3. En cada casilla de un tablero de $N \times N$ hay escrito un número. Diremos que una casilla C es *buena* si alguna de las casillas vecinas de C contiene al número igual al número de C más 1, y otra casilla vecina de C contiene al número igual al número de C más 3. ¿Cuál es la mayor cantidad de casillas buenas que puede tener el tablero? (Casillas vecinas son las que tienen un lado común.) 7 PUNTOS

4. Se dan dos circunferencias iguales ω_1 y ω_2 de centros O_1 y O_2. Se eligen los puntos X e Y del segmento O_1O_2 tales que $O_1Y = O_2X$. Los puntos A y B pertenecen a ω_1 y la recta AB contiene a X. Los puntos C y D pertenecen a ω_2 y la recta CD contiene a Y. Demostrar que existe una circunferencia tangente a las rectas AO_1, BO_1, CO_2 y DO_2.

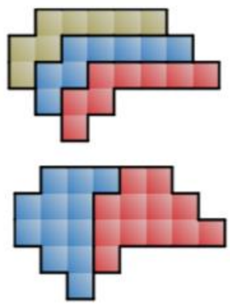


8 PUNTOS

5. Un polinomio de grado $n > 0$ tiene todos los coeficientes enteros distintos de cero y cada uno de los coeficientes es también una raíz del polinomio. Demostrar que ese polinomio no puede tener coeficientes distintos de $1, -1$ y -2 (puede haber repeticiones). 10 PUNTOS

6. Juli tienen una flauta mágica que sólo toca dos notas: "B" y "C". En un concurso de música, para ganar, él debe tocar 300 notas, las que él quiera. Pero antes de que empiece a tocar, Maléfica declara prohibidas algunas melodías arbitrarias: una de cinco notas, una de seis notas, …, una de treinta notas. Si en algún momento las últimas notas que toca Juli forman una de las melodías prohibidas, la flauta se detiene y Juli pierde. ¿Puede Juli ingeniárselas para ganar, no importa cuáles sean las melodías prohibidas por Maléfica?
12 PUNTOS

7. Llamaremos *camino* a un polígono formado por la unión de casillas de lado 1 que se puede recorrer completamente comenzando por una de sus casillas y moviéndose sólo en dos direcciones, hacia arriba o hacia la derecha. Un camino de este tipo se puede desplazar repetidas veces sumando, cada vez, el vector $(-1,1)$, formando un polígono. Demostrar que para todo camino que consista de un número par de casillas existe un entero impar k con la siguiente propiedad: Si desplazamos el camino k veces, formando un polígono como se describió en el primer párrafo, entonces el polígono resultante se puede dividir en dos partes iguales. (En la figura se muestra un ejemplo de un camino de 8 casillas desplazado $k = 3$ veces.)



12 PUNTOS