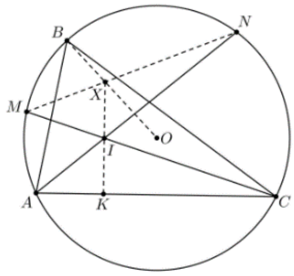
XLVI TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
OTOÑO 2024 DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL JUVENIL

1. El Barón Munchausen tiene una pila de tarjetas y escribe un número entero positivo en cada una de ellas (puede haber números repetidos). El barón anuncia que usó exclusivamente dos dígitos para escribir todos esos números. También anuncia que si para cada dos tarjetas se suman los dos números escritos, los dígitos de la izquierda de los resultados de esas sumas recorren todos los valores de 1 a 9. Determinar si es posible que lo que anunció el barón sea verdadero. 4 PUNTOS

2. Pedro y Basilio dibujan, por turnos, caminos en un mismo plano. Comienza Pedro. Cada camino es una línea recta horizontal o vertical que se puede recorrer solo en una dirección, y ésta está definida cuando se dibuja el camino. Determinar si Basilio puede siempre proceder de modo tal que después de cada uno de sus turnos uno pueda recorrer el trayecto entre dos cruces de caminos construidos (para todo par de caminos que se cruzan), no importa lo que haga Pedro en sus turnos. 6 PUNTOS

3. Sean ABC un triángulo acutángulo, I su incentro y O su circuncentro. Las rectas AI y CI cortan por segunda vez al circuncírculo del ABC en los puntos N y M respectivamente. Los segmentos MN y BO se cortan en X. Demostrar que las rectas XI y AC son perpendiculares.
ACLARACIÓN: El *circuncírculo* de un triángulo es la circunferencia que pasa por sus tres vértices. Su centro se llama *circuncentro* y es el punto de intersección de las mediatrices del triángulo.
El *incírculo* de un triángulo es la circunferencia tangente a sus tres lados. Su centro se llama *incentro* y es el punto de intersección de las bisectrices del triángulo. 7 PUNTOS



4. Diez niños tienen varias bolsas de caramelos. Los niños reparten entre ellos los caramelos. Ellos pasan por turnos recorriendo ordenadamente las bolsas, toman sus caramelos, y se retiran. La cantidad que sacan de cada bolsa se determina del siguiente modo: el número de caramelos que contiene en ese momento la bolsa se divide por el número de niños que aún no retiraron de esa bolsa (incluyendo al niño al que le toca sacar). Si el resto de esta división no es cero entonces el cociente se redondea para abajo. Determinar si es posible que todos los niños reciban distinto número de caramelos si el número total de bolsas es:

a) 8? 5 PUNTOS
b) 9? 3 PUNTOS

5. Sobre cada lado de un polígono convexo se construye un triángulo de manera que su tercer vértice sea el punto de intersección de las bisectrices de los dos ángulos que tienen sus vértices en los extremos de ese lado. Demostrar que estos triángulos, en conjunto, tapan todo el polígono (puede haber superposiciones).
ACLARACIÓN: Se llama *polígono convexo* al que tiene todos sus ángulos internos menores de 180º. 8 PUNTOS

6. Una movida del caballo de ajedrez se denomina *horizontal* si se desplaza dos casillas horizontalmente y una casilla verticalmente, y se denomina *vertical* en el otro caso. Hay que ubicar el caballo en una casilla de un tablero de 46×46 y hacer alternadamente movidas horizontales y verticales. Demostrar que si se visita cada casilla como mucho una vez entonces el número de movidas realizado es menor o igual que 2024.
ACLARACIÓN: El caballo de ajedrez se mueve dos casillas en una dirección y una en la dirección perpendicular. 10 PUNTOS

7. Se tienen dos sucesiones estrictamente crecientes de números positivos. En cada sucesión, cada número, a partir del tercero, es igual a la suma de los dos números que lo preceden en esa sucesión. Se sabe que cada una de las sucesiones contiene por lo menos un número que no figura en la otra sucesión. Determinar la mayor cantidad de números en común que pueden tener estas dos sucesiones. 10 PUNTOS

XLVI TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
OTOÑO 2024 DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL MAYOR

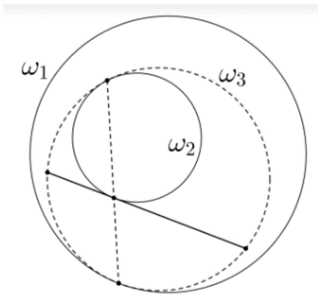
1. Pedro escribe un número entero positivo en el pizarrón. Cada minuto Basilio multiplica por 2 o por 3 el último número escrito y escribe el resultado en el pizarrón. Determinar si Pedro puede elegir el número inicial de manera que, no importa cuál sea la estrategia de Basilio, en todo momento la cantidad de números del pizarrón que comienzan con 1 o con 2 sea mayor que la cantidad de números del pizarrón que comienzan con 7, 8 o 9. 4 PUNTOS

2. Un tablero cuadrado de 20×20 se divide en 200 dominós (rectángulos de 2×1 que abarcan 2 casillas cada uno). Demostrar que hay una recta que contiene los centros de por lo menos diez de esos dominós. 6 PUNTOS

3. Se sabe que cada paralelepípedo rectángulo tiene la siguiente propiedad: el cuadrado de su volumen es igual a la multiplicación de las áreas de tres caras que comparten un vértice (entre las tres). Determinar si hay algún paralelepípedo con esa misma propiedad pero que no sea rectángulo. 7 PUNTOS

4. Determinar si existe una sucesión infinita de números reales $a_1, a_2, a_3, \dots$ tal que $a_1 = 1$ y para todo número entero positivo k se tiene la igualdad $a_k = a_{2k} + a_{3k} + a_{4k} + \dots$. 8 PUNTOS

5. Se da una circunferencia ω_1 y otra circunferencia ω_2 en su interior. Se elige una nueva circunferencia ω_3 que es tangente a las dos circunferencias anteriores y las dos tangencias son tangencias interiores. Se unen los dos puntos de tangencia mediante un segmento. Se traza una recta tangente a ω_2 que pasa por el segundo punto de intersección del segmento mencionado y la circunferencia ω_2. Se determina así una cuerda de la circunferencia ω_3. Demostrar que los extremos de estas cuerdas (que se obtienen con todas las posibles elecciones de ω_3) pertenecen a una circunferencia fija. 10 PUNTOS



6. El castillo de Merlín tiene 100 habitaciones y 1000 pasillos. Cada pasillo une dos habitaciones. Cada par de habitaciones están unidas como mucho por un pasillo. Merlín plantea un desafío a un grupo de sabios. Les da un plano del castillo y les informa las reglas. Los sabios deben distribuirse en las habitaciones como deseen. Cada minuto Merlín elegirá un pasillo y uno de los sabios tendrá que recorrerlo desde la habitación de uno de sus extremos hasta la habitación del otro extremo. Merlín gana si en las dos habitaciones que son extremos del pasillo elegido no hay sabios.
Diremos que un número m es el *número mágico del castillo* si m sabios pueden ponerse de acuerdo antes del desafío y distribuirse de manera tal que Merlín nunca gane y m sea el mínimo número posible para esto. Determinar los posibles valores del número mágico. (Merlín y todos los sabios siempre conocen la ubicación de todos los sabios) 12 PUNTOS

7. Varias servilletas de igual tamaño y con forma de círculos unitarios están colocadas sobre una mesa (posiblemente con superposiciones). Determinar si siempre es posible clavar varios clavos (del diámetro de un punto) de modo que todas las servilletas queden unidas a la mesa con el mismo número de clavos. (Los clavos no se pueden ubicar en los bordes de las servilletas.) 14 PUNTOS