XIX Olimpíada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Duración: 4 horas

Cada problema vale 7 puntos Marzo 2007

Los problemas son confidenciales hasta su publicación en el sitio web oficial de APMO.
Por favor, no publicar ni discutir los problemas en Internet hasta esa fecha.
No se puede usar calculadora.

Problema 1. Sea S un conjunto de 9 enteros distintos cuyos factores primos son todos menores o iguales que 3. Demostrar que S contiene 3 enteros distintos tales que su producto es un cubo perfecto.

Problema 2. Sea ABC un triángulo acutángulo con $\angle BAC = 60^{\circ}$ y $AB > AC$. Sean I el incentro y H el ortocentro del triángulo ABC. Demostrar que

$$2\angle AHI = 3\angle ABC.$$

Problema 3. Consideramos n círculos del plano $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tales que para cada $1 \le i < n$, el centro de C_i pertenece a la circunferencia de C_{i+1}, y el centro de C_n pertenece a la circunferencia de C_1. Definimos el *rango* de una tal disposición de n círculos como el número de pares (i, j) para los cuales C_i contiene a C_j y $C_i \neq C_j$. Determinar el máximo valor posible del rango.

Problema 4. Sean x, y, z números reales positivos tales que $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$. Demostrar que

$$\frac{x^2 + yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \frac{y^2 + zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}} + \frac{z^2 + xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \ge 1.$$

Problema 5. Se tiene un tablero cuadrado de 5×5 con una luz en cada casillero. Cada luz tiene su tecla. Al tocar la tecla de cada luz cambia el estado de esa luz y la de sus vecinas (están en casillas que comparten un lado con la casilla a la que corresponde la tecla que se toca): las que están encendidas se apagan y las que están apagadas se encienden. Inicialmente todas las luces están apagadas. Al cabo de una secuencia de teclas hay exactamente una luz encendida en el tablero. Hallar todas las posibles posiciones de esa luz.