XXXIX OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

PRUEBA DE SELECCIÓN

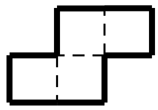
PRIMER DÍA (08/08/24)

EN TODOS LOS PROBLEMAS,
LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

1. Hallar todos los números primos positivos p, q que satisfacen la ecuación

$$p(p^4 + p^2 + 10q) = q(q^2 + 3).$$

2. Sobre un tablero de 5×5 se colocan fichas formadas por 4 casillas, como se ve en la figura, cubriendo exactamente 4 casillas del tablero. Las fichas se pueden rotar o dar vuelta. También se pueden superponer, pero no pueden sobresalir del tablero. Supongamos que cada casilla del tablero está cubierta por a lo más dos fichas. Hallar el número máximo de casillas del tablero que pueden estar cubiertas (por una o por dos fichas).



3. Sea ABC un triángulo acutángulo con sus tres lados distintos y sea M el punto medio del lado BC. La bisectriz del ángulo $B\hat{A}C$, la mediatriz del lado AB y la mediatriz del lado AC definen un nuevo triángulo. Sea H el punto de intersección de las tres alturas de este nuevo triángulo. Demostrar que H pertenece al segmento AM.
ACLARACIÓN. La *mediatriz* de un segmento es la perpendicular al segmento que pasa por su punto medio.

XXXIX OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

PRUEBA DE SELECCIÓN

SEGUNDO DÍA (09/08/24)

EN TODOS LOS PROBLEMAS, LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

4. Determinar todos los números enteros con $n \geq 2$ tales que existen dos permutaciones $(a_1, a_2, ..., a_n)$ y $(b_1, b_2, ..., b_n)$ de los números 1, 2, …, n que satisfacen que los n números $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$ son n enteros consecutivos.

5. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$(x^2 - y^2) f(xy) = x f(x^2 y) - y f(xy^2)$$

para todos x, y números reales.

6. Uri tiene 99 bolsas vacías y una cantidad ilimitada de pelotas, donde el peso de cada pelota es un número de la forma 3^n donde n es un entero que puede variar de una pelota a otra pelota (se permiten exponentes enteros negativos, como por ejemplo, $3^{-4} = \frac{1}{81}$, y el exponente 0, donde $3^0 = 1$).
Uri eligió una cantidad finita de pelotas y las distribuyó en las bolsas de manera que todas las bolsas quedaron con el mismo peso total y no sobró ninguna pelota.
Se sabe que Uri eligió a lo más k pelotas del mismo peso. Hallar el menor valor posible de k.