XXXI Olimpíada Matemática Rioplatense
San Isidro – 5 de Diciembre de 2024
Nivel A – Primer Día

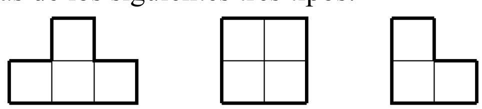
Problema 1
Un número es *rioplatense* si cumple las siguientes dos condiciones:

- Cada dígito, excepto el primero, es mayor que el dígito que está a su izquierda.
- No hay dos de sus dígitos que sean consecutivos.

Por ejemplo, 5 y 146 son rioplatenses. En cambio, 1348 no es rioplatense, porque 3 y 4 son consecutivos; y 1447 tampoco es rioplatense, porque el segundo 4 no es mayor que el dígito de su izquierda.
¿Cuántos números rioplatenses hay?

Problema 2
Se tiene un cuadrilátero *ABCD*, de lados *AB*, *BC*, *CD* y *DA*, en el cual los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$ miden 90º y el ángulo $\widehat{B}$ mide 45º. Se sabe que $AB = 31$ y el área del cuadrilátero *ABCD* es 420. Hallar la longitud del lado *CD*.

Problema 3
Ana dibuja un tablero cuadriculado que tiene al menos 4 filas y al menos 4 columnas. Luego, Beto debe cubrir completamente ese tablero, sin huecos ni superposiciones, usando únicamente piezas de los siguientes tres tipos:



Cada pieza debe cubrir exactamente 4 o 3 casillas del tablero, como muestra la figura, sin salirse del tablero.
Está permitido girar las piezas y no hace falta usar todos los tipos de pieza.
Explicar por qué, sin importar cuántas filas y cuántas columnas tenga el tablero de Ana, Beto siempre podrá cumplir su tarea.

Duración: 3 horas y media
Versión: ESPAÑOL

Problema 4
Hace cuatro días, el 2 de diciembre, ocurrió algo especial: fue el día 2 del mes 12 del año 24, y $2 \times 12 = 24$.

a) ¿En cuántas fechas del año 2024 ocurre que si escribimos la fecha como el día d del mes m, entonces $d \times m$ es igual a 24?
b) ¿En cuántas fechas del año 2024 ocurre que si escribimos la fecha como el día d del mes m, entonces $d \times m$ es un múltiplo de 24?

Problema 5
En el reino de Krikoragán existen únicamente monedas de 2, de 3 y de 7 pesos.
Un día, Otto decide ir a la tienda de Margarita para comprar un libro, llevando para eso 39 monedas. Margarita, que es muy hábil en matemática, le dice a Otto:
"No sé cuántas monedas de cada clase tienes ni si tienes de todas las clases, pero si son 39 *en total, entonces estoy segura de que podrás pagar el precio exacto de este libro usando algunas de ellas."*

a) Determinar cuánto cuesta el libro y explicar por qué es la única posibilidad.
b) Explicar cómo puede saber Margarita con certeza que Otto podrá pagar el precio exacto.

Problema 6
La *lotería rioplatense* sortea 5 números distintos del 1 al 100. Cada cartón de la lotería tiene 5 números distintos del 1 al 100, ordenados de menor a mayor, y no hay dos cartones que tengan exactamente los mismos 5 números. Después del sorteo, el *puntaje* de un cartón es la cantidad de los números del cartón que salieron sorteados.
Agus y Cande van a comprar cartones para la lotería rioplatense. Agus eligió comprar el cartón que tiene los números 1, 2, 3, 4, 5. Cande, que sabe qué cartón compró Agus, elige varios cartones para comprar, con alguno de los siguientes objetivos:

1. Que una vez realizado el sorteo, o bien el cartón de Agus tenga puntaje 5 o bien ella tenga al menos un cartón con un puntaje mayor que el de Agus.
2. Que una vez realizado el sorteo, o bien el cartón de Agus tenga puntaje 5 o bien ella tenga al menos un cartón con un puntaje mayor o igual que el de Agus.

En cada uno de los dos casos, determinar cuántos cartones debe comprar Cande como mínimo para poder estar segura de que cumplirá su objetivo.
ACLARACIÓN: Cande puede elegir los 5 números de cada uno de los cartones que compra.

Duración: 3 horas y media
Versión: ESPAÑOL

XXXI Olimpíada Matemática Rioplatense
San Isidro – 5 de Diciembre de 2024

Nivel 1 – Primer Día

Problema 1

En el pizarrón están escritos todos los números compuestos mayores o iguales que 2 y menores o iguales que 30.

Decidir si es posible borrar tres de los números escritos y luego pintar cada uno de los números restantes de rojo, verde o azul de manera que se cumpla la siguiente condición: si se calcula la multiplicación de todos los números de un mismo color, el resultado es el mismo para los rojos, los verdes y los azules.

ACLARACIÓN: Los números compuestos son los enteros que tienen por lo menos 3 divisores positivos.

Problema 2

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_{2024}$ números enteros positivos tales que las 1012 fracciones

$$\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_4}, \ldots, \frac{x_{2023}}{x_{2024}}$$

son 1012 números distintos.

Determinar la mínima cantidad posible de números distintos que puede haber entre los números $x_1, x_2, \ldots, x_{2024}$.

ACLARACIÓN: Las fracciones $\frac{7}{4}$ y $\frac{21}{12}$ son el mismo número.

Problema 3

Para cada entero positivo *n*, sea $S(n)$ la suma de sus dígitos. Por ejemplo,

$$S(2024) = 2 + 0 + 2 + 4 = 8.$$

Demostrar que existen infinitos números **impares** *n* tales que $S(n) + S(n^2) + S(n^3)$ es un cuadrado perfecto.

ACLARACIÓN: Un cuadrado perfecto es el cuadrado de un número entero, por ejemplo, $64 = 8^2$ es un cuadrado perfecto.

Duración: 3 horas y media

Versión: ESPAÑOL

XXXI Olimpíada Matemática Rioplatense
San Isidro – 6 de Diciembre de 2024
Nivel 1 – Segundo Día

Problema 4

Sea ABC un triángulo tal que $A\hat{B}C = 90°$ y $AB < BC$. Supongamos que existe un punto D sobre el lado BC tal que $AB + DC = BD$ y $B\hat{A}D = 45° + A\hat{C}B$.
Demostrar que $AB = DC$.

Problema 5

Determinar todos los enteros positivos de 4 dígitos $\overline{abcd}$ tales que $\overline{abcd} \times d = \overline{dcba} \times a$.

Problema 6

Sea N un entero positivo. Inicialmente, en el pizarrón están escritos los números del 1 al N, ordenados de menor a mayor. En cada paso, Beto elige dos números a y b escritos en el pizarrón y los reemplaza por $a+k$ y $b-k$ o $a-k$ y $b+k$, respectivamente, donde k es la cantidad de números del pizarrón escritos entre a y b.
Por ejemplo, si en algún momento los números del pizarrón son

1; 2; 5; 6; 4; 3,

Beto puede elegir el 2 y el 6 y reemplazarlos por 3 y 5 o por 1 y 7, respectivamente. De esta forma en el pizarrón quedarán

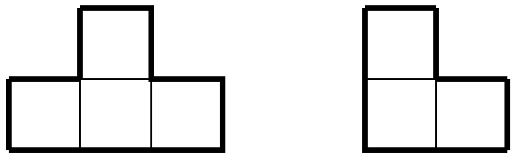
1; 3; 5; 5; 4; 3   o   1; 1; 5; 7; 4; 3

según el caso.
Determinar todos los valores de N para los cuales Beto puede, luego de una serie de pasos, dejar escritos en el pizarrón los números del 1 al N ordenados de mayor a menor.

Duración: 3 horas y media
Versión: ESPAÑOL

XXXI Olimpíada Matemática Rioplatense
San Isidro – 5 de Diciembre de 2024
Nivel 2 – Primer Día

Problema 1
Ana dibuja un tablero cuadriculado que tiene al menos 20 filas y al menos 24 columnas. Luego, Beto debe cubrir completamente ese tablero, sin huecos ni superposiciones, usando únicamente piezas de los siguientes dos tipos:



Cada pieza debe cubrir exactamente 4 o 3 casillas del tablero, como muestra la figura, sin salirse del tablero.
Está permitido girar las piezas y no hace falta usar todos los tipos de pieza.
Explicar por qué, sin importar cuántas filas y cuántas columnas tenga el tablero de Ana, Beto siempre podrá cumplir su tarea.

Problema 2
Sea ABC un triángulo con $AB < AC$ de incentro I y circuncírculo ω. Sea D la intersección de la bisectriz externa del ángulo $B\hat{A}C$ con la recta BC. Sea E el punto medio del arco BC de ω que no contiene a A. Sean M el punto medio de DI y X la intersección de EM con ω. Probar que IX y EM son perpendiculares.

Problema 3
Sean a, b, c enteros positivos. Demostrar que para infinitos enteros positivos impares n existe $m > n$ entero tal que $a^n + b^n + c^n$ divide a $a^m + b^m + c^m$.

Duración: 3 horas y media
Versión: ESPAÑOL

Problema 4

Sea N un entero positivo. Una sucesión no decreciente $a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ de enteros positivos se dice *N-rioplatense* si existe un índice i tal que $N = \frac{i}{a_i}$.
Probar que toda sucesión 2024-rioplatense es k-rioplatense para $k = 1, 2, 3, \ldots, 2023$.

Problema 5

Sea n un entero positivo. Ana y Beto juegan en un tablero de $2 \times n$ (con 2 filas y n columnas). Primero, Ana escribe un dígito del 1 al 9 en cada casilla del tablero, de manera tal que en cada columna los dos dígitos escritos sean distintos. Luego Beto borra un dígito de cada columna. Leyendo de izquierda a derecha los dígitos que quedaron sin borrar se forma un número de n dígitos. Beto gana si este número es múltiplo de n; en caso contrario, gana Ana. Determinar cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora en los siguientes casos:

(a) $n = 1001$,
(b) $n = 1003$.

Problema 6

Sea ABC un triángulo con $B\hat{A}C = 90^\circ$ y $AB > AC$. Sean D el pie de la altura por A a BC, M el punto medio de BC y A' el reflejo de A por D. La mediatriz de DM corta a las rectas AB y $A'C$ en P y Q, respectivamente. Sea K la intersección de las rectas $A'C$ y AB. Probar que PQ es tangente a la circunferencia circunscrita al triángulo QDK.

Duración: 3 horas y media
Versión: ESPAÑOL

Problema 1
Sea ABC un triángulo con $BC > AC > AB$. Se marca un punto X sobre el lado BC con $AX = XC$. Sea Y un punto del segmento AX con $CY = AB$.
Probar que $C\hat{Y}X = A\hat{B}C$.

Problema 2
En Tigre hay 2024 islas, algunas de ellas conectadas por un puente de ida y vuelta. Se sabe que se puede ir de cualquier isla a cualquier otra usando solamente los puentes (posiblemente varios de ellos). En k de las islas hay una bandera $(0 \le k \le 2024)$. Ana quiere destruir algunos de los puentes de forma tal que después de hacerlo se cumplan las siguientes dos condiciones:

- Si una isla tiene una bandera, queda conectada a una cantidad impar de islas.
- Si una isla no tiene una bandera, queda conectada a una cantidad par de islas.

Determinar todos los valores de k para los cuales Ana siempre puede lograr su objetivo sin importar cuál sea la configuración inicial de puentes y cuales sean las islas con una bandera.

Problema 3
Dado un conjunto S de números enteros, una *operación permitida* consiste de los siguientes tres pasos:

- Elegir un entero positivo n.
- Elegir $n + 1$ elementos $a_0, a_1, ..., a_n \in S$, $a_n \neq 0$, no necesariamente distintos.
- Agregar al conjunto S todas las raíces enteras del polinomio

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 .$$

Beto debe elegir un conjunto inicial S y hacer varias operaciones permitidas, de manera que al final del proceso S contenga entre sus elementos a los 2024 números enteros 1, 2, 3, …, 2023, 2024.
Determinar el menor k para el cual existe un conjunto inicial S de k elementos que le permita a Beto cumplir su objetivo.

Duración: 3 horas y media
Versión: ESPAÑOL

XXXI Olimpíada Matemática Rioplatense
San Isidro – 6 de Diciembre de 2024
Nivel 3 – Segundo Día

Problema 4
Hay 4 países: Argentina, Brasil, Perú y Uruguay. Cada país consiste de 4 islas. Hay puentes de ida y vuelta entre algunas de las 16 islas. Carlos notó que siempre que recorra algunas de las islas usando los puentes, sin usar dos veces el mismo puente y terminando en la isla en la que comenzó su recorrido, necesariamente visitará al menos una isla de cada país.
Determinar el mayor número de puentes que puede haber.

Problema 5
Sea $S = \{2, 3, 4, \ldots\}$ el conjunto de los enteros positivos mayores a 1. Hallar todas las funciones $f : S \to S$ que satisfacen

$$\mathrm{mcd}(a, f(b)) \cdot \mathrm{mcm}(f(a), b) = f(ab)$$

para todo par de enteros $a, b \in S$.

Aclaración: $\mathrm{mcd}(a, b)$ es el máximo común divisor de a y b, y $\mathrm{mcm}(a, b)$ es el mínimo común múltiplo de a y b.

Problema 6
Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB < AC$ y sea H su ortocentro. Sean D, E, F y M los puntos medios de BC, AC, AB y AH respectivamente.
Demostrar que los circuncírculos de los triángulos AHD, BMC y DEF pasan los tres por un mismo punto en común.

Duración: 3 horas y media
Versión: ESPAÑOL