PRIMER NIVEL

XXXVIII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Determinar todos los pares de números primos *p* y *q* mayores que 1 y menores que 100, tales que los siguientes cinco números:

$$p+6,\ p+10,\ q+4,\ q+10,\ p+q+1$$

son todos números primos.

Problema 2.
En cada billete de la lotería de OMA hay un número de 9 cifras que solo usa los dígitos 1, 2 y 3 (no necesariamente los tres). Cada billete tiene uno de los tres colores rojo, azul o verde. Se sabe que si dos billetes no coinciden en ninguna de las 9 cifras entonces son de colores distintos. El billete 122222222 es rojo, el 222222222 es verde, ¿de qué color es el billete 123123123?

Problema 3.
Sea *ABC* un triángulo isósceles y rectángulo en *A* con *AB*=*AC*. Sean *M* y *N* en el lado *BC*, con *M* entre *B* y *N*, tal que $BM^2+NC^2=MN^2$. Determinar la medida del ángulo $M\hat{A}N$.

PRIMER NIVEL

XXXVIII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
Martu quiere armar un juego de tarjetas con las siguientes propiedades:

- Cada tarjeta tiene escrito un número entero positivo.
- El número de cada tarjeta es igual a uno de 5 números posibles.
- Si se toman dos tarjetas cualesquiera y se suman, siempre es posible encontrar otras dos tarjetas del juego tales que la suma sea la misma.

Determinar la menor cantidad de tarjetas que puede tener el juego de Martu y dar un ejemplo para esa cantidad.

Problema 5.
Mica escribió una lista de números con el siguiente procedimiento. El primer número es 1, y luego, en cada paso, escribió el resultado de sumar el número anterior más 3. Los primeros números de la lista de Mica son 1, 4, 7, 10, 13, 16, …
A continuación, Facu subrayó todos los números de la lista de Mica que son mayores que 10 y menores que 100000, y que tienen todas sus cifras iguales.
¿Cuáles son los números que subrayó Facu?

Problema 6.
Mili elije un número entero positivo n y a continuación Uriel colorea cada número entero entre 1 y n inclusive de rojo o de azul. Luego Mili elige cuatro números a, b, c, d de un mismo color (puede haber números repetidos). Si $a+b+c=d$ entonces gana Mili. Determinar el menor n que puede elegir Mili para asegurarse la victoria, no importa cómo coloree Uriel.

SEGUNDO NIVEL

XXXVIII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Se tienen dos pizarrones A y B. Hay que escribir en ellos algunos de los números enteros mayores o iguales a 2 y menores o iguales a 20 de modo tal que cada número del pizarrón A sea coprimo con cada número del pizarrón B. Determinar el máximo valor posible de la multiplicación de la cantidad de números escritos en A por la cantidad de números escritos en B.
Nota: Dos números enteros son coprimos si su máximo común divisor es 1.

Problema 2.
En una semicircunferencia de centro O, sea C un punto en el diámetro AB diferente de A, de B y de O. Se trazan por C dos semirrectas tales que los ángulos que forman estas semirrectas con el diámetro AB sean iguales y que intersecan a la semicircunferencia en D y en E. La recta perpendicular a CD por D corta a la semicircunferencia en K. Demostrar que si $D \neq E$ entonces KE es paralelo a AB.

Problema 3.
Una circunferencia está dividida en $2n$ arcos iguales mediante $2n$ puntos. Hallar todos los $n > 1$ tales que esos puntos se pueden unir de a dos utilizando n segmentos, todos ellos de longitudes diferentes y de modo que cada punto sea extremo de exactamente un segmento.

SEGUNDO NIVEL

XXXVIII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
La suma de varios enteros positivos, no necesariamente diferentes, todos ellos menores o iguales a 10 es igual a S. Se quiere distribuir todos estos números en dos grupos tales que la suma de los números en cada grupo sea menor o igual a 80. Determinar todos los valores de S para los que esto es posible.

Problema 5.
Determinar todos los enteros positivos n tales que $n \cdot 2^{n-1} + 1$ es un cuadrado perfecto.

Problema 6.
Decidir si es posible elegir 330 puntos en el plano de modo que entre todas las distancias que se forman entre dos ellos haya por lo menos 1700 que sean iguales.

TERCER NIVEL

XXXVIII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Una sucesión infinita de dígitos 1 y 2 está determinada por las siguientes dos propiedades:
(i) La sucesión se construye escribiendo, en algún orden, bloques 12 y bloques 112.
(ii) Si se reemplaza cada bloque 12 por 1 y cada bloque 112 por 2 se obtiene, de nuevo, la misma sucesión.
¿En qué posición está el centésimo dígito 1? ¿Cuál es el milésimo dígito de la sucesión?

Problema 2.
Sea m un entero positivo para el que existe un entero positivo n tal que la multiplicación mn es un cuadrado perfecto y $m - n$ es primo. Hallar todos los m para $1000 \leq m \leq 2021$.

Problema 3.
Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia tal que $A\hat{B}C = 60°$.
a) Demostrar que si $BC=CD$ entonces $AB= CD+DA$.
b) ¿Es cierto que si $AB= CD+DA$ entonces $BC=CD$?

TERCER NIVEL

XXXVIII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
Hallar los números reales *x*, *y*, *z* tales que
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=\frac{1}{2};\quad \frac{1}{y}+\frac{1}{x+z}=\frac{1}{3};\quad \frac{1}{z}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{4}.$$

Problema 5.
Se define la sucesión a_n ($n \geq 1$) de números naturales como $a_{n+1}=a_n+b_n$, donde b_n es el número que tiene los mismos dígitos que a_n pero en el orden opuesto (b_n puede comenzar con 0). Por ejemplo, si $a_1=180$, entonces $a_2=261, a_3=423, \ldots$

(a) Decidir si se puede elegir a_1 de manera que a_7 sea primo.

(b) Decidir si se puede elegir a_1 de manera que a_5 sea primo.

Problema 6.
Decimos que un entero positivo *k* es *tricúbico* si existen tres enteros positivos *a*, *b*, *c*, no necesariamente distintos, tales que $k=a^3+b^3+c^3$.

a) Demostrar que existen infinitos enteros positivos *n* que satisfacen la siguiente condición: exactamente uno de los tres números *n*, *n*+2 y *n*+28 es tricúbico.

b) Demostrar que existen infinitos enteros positivos *n* que satisfacen la siguiente condición: exactamente dos de los tres números *n*, *n*+2 y *n*+28 son tricúbicos.

c) Demostrar que existen infinitos enteros positivos *n* que satisfacen la siguiente condición: los tres números *n*, *n*+2 y *n*+28 son tricúbicos.