PRIMER NIVEL

XXXVI OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Los tres enteros 2000, 19 y n están escritos en el pizarrón. Ana y Beto juegan el siguiente juego: Comienza Ana y luego juegan por turnos. Cada jugada consiste en borrar uno de los números del pizarrón y reemplazarlo por la diferencia de los otros dos (el mayor menos el menor). Solo están permitidas las jugadas en las que se modifica uno de los números escritos. El jugador que en su turno no puede jugar, pierde.
Demostrar que para todo valor de n, el juego tiene un ganador y determinar quién gana si los números del pizarrón son 2000, 19 y 2019.

Problema 2.
Sea n un entero positivo. Se tienen n bolillas numeradas del 1 al n y tres cajas de diferentes colores. Hallar el menor n tal que para toda ubicación de las n bolillas en las tres cajas siempre haya en una misma caja dos bolillas tales que la diferencia de los números escritos en ellas (el mayor menos el menor) sea igual a un número entero elevado al cuadrado.

Problema 3.
En el triángulo ABC sean D y E en los lados AB y AC respectivamente, tales que $BD=CE$. Sean M y N los puntos medios de BC y DE respectivamente.

Demostrar que la bisectriz del ángulo $B\hat{A}C$ es paralela a la recta MN.

PRIMER NIVEL

XXXVI OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
Bruno elige un número entero positivo X. A continuación, Flor elige cuatro números enteros a, b, c, d y calcula $N=(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)(a-c)(b-d)$, la multiplicación de las seis diferencias entre esos cuatro números. Determinar el mayor valor de X con el que Bruno tiene la certeza de que N será múltiplo de X.

Problema 5.
Hallar el mayor número entero capicúa de 5 dígitos que es divisible por 101.

ACLARACIÓN: Un número es capicúa si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.

Problema 6.
En un tablero de 9×9 hay que colorear de rojo algunas casillas, por lo menos una. Para cada coloración, sea P la cantidad de casillas, coloreadas o no, que tienen un número par de casillas vecinas rojas. (Dos casillas son vecinas si tienen un lado común.) Dar una coloración del tablero que tenga el menor valor posible de P y demostrar que no puede haber un valor más chico.
ACLARACIÓN: 0 es par.

SEGUNDO NIVEL

XXXVI OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

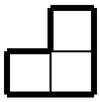
ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Decimos que tres enteros positivos *a*, *b*, *c* forman una *familia* si se cumplen las siguientes dos condiciones

- $a+b+c=900$;
- existe un entero *n*, $n \geq 2$, tal que $\frac{a}{n-1}=\frac{b}{n}=\frac{c}{n+1}$.

Hallar la cantidad de familias que hay.

Problema 2.
Se tiene un tablero de 7×7. Julián colorea 29 casillas de negro. Luego, Pilar debe colocar sobre el tablero un codo que tapa exactamente tres casillas como las de la figura (orientado de cualquier manera). Si las tres casillas que tapa el codo son negras, gana Pilar.



Determinar si Julián puede realizar la coloración de modo que a Pilar le resulte imposible ganar.

Problema 3.
Sean Γ una circunferencia de centro *S* y radio *r* y *A* un punto exterior a la circunferencia. Sea *BC* un diámetro de Γ tal que *B* no pertenece a la recta *AS*, y consideramos el punto *O* en el que se cortan las mediatrices del triángulo *ABC*, o sea, el circuncentro del *ABC*.

Determinar todas las posibles ubicaciones del punto *O* cuando *B* varía en la circunferencia Γ.

SEGUNDO NIVEL

XXXVI OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
Llamaremos números *similares* a los números enteros positivos que tienen exactamente los mismos dígitos. Por ejemplo, 1241, 2114, 4211 son números similares, pero 1424 no es similar a los anteriores.
Decidir si existen tres números similares de 300 dígitos cada uno, con sus dígitos distintos de 0, y tales que la suma de dos de ellos sea igual al tercero. Si la respuesta es sí, dar un ejemplo y si es no, justificar por qué.

Problema 5.
En un club algunos pares de socios son amigos. Dado $k \geq 3$ diremos que un club es k – *amigable* si en todo grupo de k socios éstos se pueden sentar en una mesa redonda de modo que cada par de vecinos son amigos.
a) Demostrar que si un club es 6 – amigable entonces es 7 – amigable.
b) ¿Es cierto que si un club es 9 – amigable entonces es 10 – amigable?

Problema 6.
Sea n un número natural. Definimos $f(n)$ como la cantidad de maneras de escribir n como suma de potencias de 2, donde se tiene en cuenta el orden en que aparece cada término. Por ejemplo, $f(4)=6$ pues 4 se puede escribir como $4; 2+2; 2+1+1; 1+2+1; 1+1+2; 1+1+1+1$.
Hallar el menor n mayor que 2019 para el que $f(n)$ es impar.

TERCER NIVEL

XXXVI OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Un conjunto de números enteros positivos distintos se llama *singular* si, para cada uno de sus elementos, luego de tachar ese elemento, los restantes se pueden agrupar en dos conjuntos sin elementos comunes de modo que la suma de los elementos de los dos grupos sea la misma. Hallar el menor entero positivo $n>1$ tal que existe un conjunto singular A con n elementos.

Problema 2.
Sea $n\geq 1$ un entero. Se tienen dos sucesiones, cada una de n números reales positivos $a_1, a_2, ..., a_n$ y $b_1, b_2, ..., b_n$ tales que $a_1+a_2+...+a_n=1$ y $b_1+b_2+...+b_n=1$. Hallar el menor valor posible que puede tomar la suma

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+...+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}.$$

Problema 3.
En el triángulo ABC vale que $A\hat{C}B = 2\cdot A\hat{B}C$. Además P es un punto interior del triángulo ABC tal que $AP=AC$ y $PB=PC$. Demostrar que $B\hat{A}C = 3\cdot B\hat{A}P$.

TERCER NIVEL

XXXVI OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
Se tiene un conjunto M de 2019 números reales tales que para todo par a, b de números de M se verifica que $a^2 + b\sqrt{2}$ es un número racional. Demostrar que para todo a de M vale que $a\sqrt{2}$ es un número racional.

Problema 5.
Se tiene una progresión aritmética de 7 términos en la que todos los términos son números primos diferentes. Determinar el menor valor posible del último término de una tal progresión.
ACLARACIÓN: En una progresión aritmética de diferencia d cada término es igual al anterior más d.

Problema 6.
Los números naturales desde 1 hasta 300 inclusive se ubican alrededor de una circunferencia. Decimos que un tal ordenamiento es *alternado* si cada número es menor que sus dos vecinos o es mayor que sus dos vecinos. A un par de números vecinos lo llamaremos *par bueno* si al quitar ese par de la circunferencia, los restantes números forman un ordenamiento alternado.
Determinar la menor cantidad posible de pares buenos que puede haber en un ordenamiento alternado de los números del 1 al 300 inclusive.