PRIMER NIVEL

XXXV OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Se tienen 10 naipes y en cada uno de ellos hay escrito un dígito distinto desde 0 hasta 9. Ana y Beto, por turnos, eligen un naipe y lo colocan a la derecha de los naipes que ya hayan colocado previamente de modo que cada jugador al finalizar el juego forma un número de 5 dígitos. Cada jugador tiene prohibido elegir el 0 en su primer turno. Ana gana si su número de 5 dígitos es divisible por 6. En otro caso gana Beto. Cada jugador juega para ganar. Si Ana juega en primer lugar, determinar qué jugador tiene estrategia ganadora y explicar su estrategia.

Problema 2.
a) Se repartieron 80 caramelos entre 8 niños. Como no todos obtuvieron la misma cantidad, decidieron usar el siguiente procedimiento para redistribuirlos entre ellos: Si dos niños *A* y *B* tienen respectivamente a y b caramelos y $a+b$ es par, entonces cada uno de ellos se queda con $\frac{a+b}{2}$ caramelos. Pero si $a+b$ es impar, cada uno se queda con los caramelos que tiene. Determinar si repitiendo este procedimiento los niños pueden lograr siempre que todos obtengan la misma cantidad de caramelos.
b) El mismo problema que en a) con 100 caramelos repartidos entre 10 niños.

Problema 3.
Construir, utilizando exclusivamente una regla y un compás, un trapecio *ABCD* de bases *AB* y *CD* tal que si *E* es el punto medio del lado *AD* vale que $EC = BC = 4$, $CD = 2$ y $E\hat{C}B = 120^o$. Indicar los pasos de la construcción y calcular el área del trapecio *ABCD*.
Nota. No es necesario explicar cómo se trazan paralelas y perpendiculares a una recta por un punto.

PRIMER NIVEL

XXXV OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
Sobre una mesa hay 100 diamantes de los cuales 50 son auténticos y 50 son falsos. La única persona capaz de distinguir cuál es cual es Bruno. Cada vez que alguien le señala 3 diamantes, Bruno tapa uno de ellos y luego dice con absoluta veracidad cuántos de los restantes dos son auténticos. Determinar si siempre es posible hallar con certeza los 50 diamantes auténticos independientemente de cómo elija Bruno el diamante que tapa cada vez.

Problema 5.
Una máquina expendedora vende pasajes para viajar a 200 ciudades distintas. Un día vendió 3800 pasajes.
a) Determinar si siempre es verdadero que hay por lo menos 6 ciudades para las que se vendieron el mismo número de pasajes.
b) Determinar si siempre es verdadero que hay por lo menos 7 ciudades para las que se vendieron el mismo número de pasajes.

Problema 6.
Se tienen 53 números enteros positivos distintos menores que 2018 tales que la suma de 27 de estos números siempre es mayor que la suma de los restantes 26 números.
Determinar el menor valor posible del menor de los 53 números y para este valor hallar los 53 números. Dar todas las posibilidades.

SEGUNDO NIVEL

XXXV OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Se hace una lista de 2018 números con el siguiente procedimiento: el primer número es 47, el segundo número es 74, y a partir de allí, cada número es igual al número que forman las dos últimas cifras de la suma de los dos números anteriores:

47, 74, 21, 95, 16, 11, ...

Bruno eleva cada uno de los 2018 números al cuadrado y los suma. Determinar el resto de dividir esta suma por 8.

Problema 2.
Se tienen n^2 cajas vacías; cada una de ellas tiene base cuadrada. La altura y el ancho de cada caja son números enteros entre 1 y n inclusive, y no hay dos cajas iguales. Una caja cabe dentro de otra si su altura y su ancho son menores y además al menos una de las medidas es menor por al menos 2 unidades. De este modo podemos formar sucesiones de cajas (la primera dentro de la segunda, la segunda dentro de la tercera, y así siguiendo). Ponemos cada una de estas sucesiones en un estante distinto. ¿Cuántos estantes se necesitan para guardar, con certeza, todas las cajas?

Problema 3.
Un programa de geometría en la computadora permite realizar las siguientes operaciones:

- Marcar puntos en segmentos, en rectas o fuera de ellos.
- Trazar la recta que une dos puntos.
- Hallar el punto de intersección entre dos rectas.
- Dado un punto P y una recta ℓ, trazar el punto simétrico de P respecto de ℓ.

Dado un triángulo ABC, utilizando exclusivamente las operaciones permitidas, construir el punto de intersección de las mediatrices del triángulo.

Nota. La mediatriz de un segmento es la perpendicular al segmento por su punto medio.

SEGUNDO NIVEL

XXXV OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
Hay 456 personas alrededor de una circunferencia que denotamos $X_1, X_2, ..., X_{456}$ y cada una de ellas pensó un número. Cada vez que Laura dice un número entero k con $2 \le k \le 100$, el locutor anuncia todos los números $p_1, p_2, ..., p_{456}$ que son los promedios de los números que pensaron las personas de todos los grupos ordenados de k personas consecutivas: p_1 es el promedio de los números que pensaron las personas desde X_1 hasta X_k, p_2 es el promedio de los números que pensaron las personas desde X_2 hasta X_{k+1}, y así siguiendo hasta llegar a p_{456}, promedio de los números que pensaron las personas desde X_{456} hasta X_{k-1}. Determinar cuántos números k debe decir Laura como mínimo para que con los correspondientes anuncios del locutor pueda conocer con certeza el número que pensó la persona X_{456}.

Problema 5.
Un número entero positivo se dice *bonito* si es igual a la suma de las potencias cuartas de cinco divisores distintos.
a) Demostrar que todo número bonito es divisible por 5.
b) Determinar si existen infinitos números bonitos.

Problema 6.
Ana escribe un código de tres dígitos y Beto tiene que descubrirlo. Para ello puede preguntar por una secuencia de tres dígitos y Ana le responderá “tibio” si la secuencia que propone Beto tiene por lo menos un dígito correcto y en la posición correcta, y le responderá “frío” en caso contrario. Por ejemplo, si el código correcto es 014, entonces si Beto pregunta 099 o pregunta 014 recibe en ambos casos la respuesta “tibio” y si pregunta 140 o 322 recibe la respuesta “frío”. Determinar el mínimo número de preguntas que necesita Beto para conocer con certeza el código correcto.

TERCER NIVEL

XXXV OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Sea p un número primo y r el resto de la división de p por 210. Se sabe que r es un número compuesto y que se puede escribir como suma de dos cuadrados perfectos distintos de cero. Hallar todos los primos menores que 2018 que satisfacen estas condiciones.

Problema 2.
Hay n caballeros numerados de 1 a n y una mesa redonda con n sillas. El primer caballero elige su silla, y a partir de él, el caballero número $k+1$ se sienta k lugares a la derecha del caballero número k, para todo $1 \leq k \leq n-1$ (se cuentan sillas ocupadas y vacías). En particular, el segundo caballero se sienta al lado del primero. Hallar todos los valores de n para que los n caballeros ocupen las n sillas siguiendo el procedimiento descripto.

Problema 3.
Se tiene un tablero de 7×7 dividido en 49 casillas. Mateo coloca una moneda en una casilla.
a) Demostrar que Mateo puede colocar la moneda de modo que a Emi le resulte imposible cubrir completamente las 48 casillas restantes, sin huecos ni superposiciones, utilizando 15 rectángulos de 3×1 y un codo de tres casillas, como los de la figura.

b) Demostrar que no importa en qué casilla coloque Mateo la moneda, Emi siempre podrá cubrir las 48 casillas restantes usando 14 rectángulos de 3×1 y dos codos de tres casillas.

TERCER NIVEL

XXXV OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
Se tiene un tablero cuadriculado de 50×50. Carlos va a escribir un número en cada casilla con el siguiente procedimiento. Elige primero 100 números distintos que denotamos $f_1, f_2, f_3, ..., f_{50}, c_1, c_2, c_3, ..., c_{50}$ entre los cuales hay exactamente 50 que son racionales. A continuación escribe en cada casilla (i, j) el número $f_i \cdot c_j$ (la multiplicación de f_i por c_j).
Determinar la máxima cantidad de números racionales que pueden contener las casillas del tablero.

Problema 5.
En el plano se tienen 2018 puntos entre los que no hay tres en una misma recta. Se colorean estos puntos con 30 colores de modo que no haya dos colores que tengan la misma cantidad de puntos. Se forman todos los triángulos con sus tres vértices de distinto color. Determinar la cantidad de puntos de cada uno de los 30 colores para que el número total de triángulos con los tres vértices de distinto color sea lo más grande posible.

Problema 6.
Sea *ABCD* un paralelogramo. Una circunferencia interior del *ABCD* es tangente a las rectas *AB* y *AD* y corta a la diagonal *BD* en *E* y *F*. Demostrar que existe una circunferencia que pasa por *E* y *F* y es tangente a las rectas *CB* y *CD*.