PRIMER NIVEL

XLI OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.

Bruno hace una lista de números enteros positivos consecutivos tales que cada número de la lista tiene un divisor común con 2024 que es más grande que 1. Determinar la mayor cantidad de números que puede tener la lista de Bruno.

Problema 2.

Se tiene un tablero de 3×3 y nueve tarjetas con los números $-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4$. Determinar de cuántas maneras se pueden distribuir las tarjetas en las nueve casillas del tablero, una en cada casilla, de modo que la suma de los números de las 3 tarjetas en cada fila, en cada columna y en cada una de las 2 diagonales sea siempre un número no negativo.

Problema 3.

Una araña y una mosca están sobre la superficie de un cubo de arista 1. La mosca quiere ubicarse en una posición tal que el menor camino hasta la araña, caminando por la superficie del cubo, sea lo mayor posible. Decidir si el lugar en el que debe posarse la mosca es siempre el punto opuesto al de la araña.

ACLARACIÓN: *Opuesto* significa simétrico con respecto al centro del cubo.

PRIMER NIVEL

XLI OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.

Juli tiene igual cantidad de monedas chicas y monedas grandes. Todas las monedas chicas tienen igual peso y todas las monedas grandes tienen igual peso. Una moneda chica y una grande, en conjunto, pesan 20 gramos. Una moneda chica junto con todas las monedas grandes pesan 188 gramos. Una moneda grande junto con todas las monedas chicas pesan 132 gramos. Determinar cuántas monedas tiene Juli, cuánto pesa cada moneda chica y cuánto cada moneda grande.

Problema 5.

Sea *ABCD* un cuadrado de lado 1. Decimos que *M* es un *punto medial* del cuadrado si existen dos puntos *P*, *Q* en los lados del cuadrado tales que $PQ=1$ y *M* es el punto medio de *PQ*. Determinar el conjunto de todos los puntos mediales del cuadrado *ABCD*.

Problema 6.

Se tiene un tablero de 24×24 y lápices de tres colores. Matías divide el tablero en 288 rectángulos de 2×1 o 1×2 que no se superponen ni sobresalen del tablero. Lucas debe colorear todos estos rectángulos, cada uno con uno de los tres colores, de manera que haya la misma cantidad de rectángulos de cada color y que cada rectángulo *d* tenga a lo más dos *vecinos* del mismo color que *d*. Demostrar que Lucas siempre puede lograr una coloración correcta.

ACLARACIÓN: Dos rectángulos se dicen *vecinos* si tienen más de un punto de contacto.

SEGUNDO NIVEL

XLI OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Sea *ABC* un triángulo equilátero con lados de longitud 8 y sean *D*, *E*, *F* puntos en los lados *BC*, *CA* y *AB* respectivamente. Si *BD*=2 y $A\hat{D}E = D\hat{E}F = 60°$, calcular la longitud del segmento *AF*.

Problema 2.
Ana y Beto juegan al siguiente juego con una varilla de longitud 15. Comienza Ana y en su primera jugada corta la varilla en 2 trozos de longitudes enteras; luego cada jugador en su turno debe cortar uno de los trozos, a su elección, en dos nuevos trozos de longitudes enteras. Pierde el jugador que, en su turno, deja al menos un trozo de longitud igual a 1. Determinar cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y dar su estrategia ganadora.

Problema 3.
a) Dar un ejemplo de una lista infinita de números de la forma $a+n\cdot d$, con $n \geq 0$ entero, donde *a* y *d* son enteros positivos, tales que ningún número de la lista sea igual a la potencia *k* de un entero, para todo *k*=2,3,4,… .
b) Dar un ejemplo de una lista infinita de números de la forma $a+n\cdot d$, con $n \geq 0$ entero, donde *a* y *d* son enteros positivos, tales que ningún número de la lista sea igual al cuadrado de un número entero, pero la lista contenga infinitos números que sean iguales a los cubos de números enteros positivos.

SEGUNDO NIVEL

XLI OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
Hallar todos los pares (a, b) de números racionales positivos tales que

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\ .$$

Problema 5.
Sea $A_1A_2...A_n$ un polígono regular de n lados, $n\geq 3$. Inicialmente hay tres hormigas paradas en el vértice A_1. En cada minuto dos hormigas se mueven simultáneamente a un vértice vecino, pero en diferentes direcciones (una en sentido horario y la otra en sentido antihorario) y la tercera se queda en el vértice en el que está.
Determinar todos los valores de n para los que después de un tiempo las tres hormigas puedan encontrarse en un mismo vértice del polígono, diferente de A_1.

Problema 6.
Se construye una lista de 7 números enteros positivos con el siguiente procedimiento: cada número de la lista es la suma del número anterior más el número anterior pero escrito en orden inverso. Por ejemplo, si un número de la lista es el 23544, el siguiente es $68076=23544+44532$. (Está prohibido que un número de la lista empiece con 0, pero los inversos pueden empezar con 0.)
Decidir si se puede elegir convenientemente el primer número de la lista para que el séptimo sea un número primo.

TERCER NIVEL

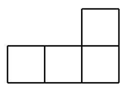
XLI OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Determinar los números reales *a*, *b*, *c*, *d* tales que

$$\begin{cases} a\cdot b+c+d=6 \\ b\cdot c+d+a=2 \\ c\cdot d+a+b=5 \\ d\cdot a+b+c=3. \end{cases}$$

Problema 2.
Se tiene un tablero cuadrado de 8×8 con sus 64 casillas inicialmente blancas. Determinar el menor número de colores necesarios para colorear las casillas, cada una con un color, de modo que si cuatro casillas del tablero se pueden cubrir con una ficha *L* como la de la figura, entonces las cuatro casillas sean de distinto color.
ACLARACIÓN: La ficha se puede rotar o dar vuelta.



Problema 3.
Sea *n* un entero. Determinar la mayor cantidad de números enteros positivos menores o iguales que n^2 que se pueden pintar de rojo con la propiedad de que si *a* y *b* son rojos, $a\neq b$, entonces $a\cdot b$ no es rojo.

TERCER NIVEL

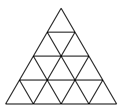
XLI OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
Sobre una mesa hay 10000 fósforos, dos de los cuales están dentro de una caja. Ana y Beto juegan por turnos al siguiente juego. Cada uno en su turno agrega a la caja una cantidad de fósforos igual a un divisor propio de la cantidad que hay en ese momento en la caja (es mayor o igual que 1 y menor que el número). El juego termina cuando por primera vez hay más de 2024 fósforos en la caja y la persona que jugó el último turno es la ganadora. Si Ana comienza el juego, determinar quién tiene estrategia ganadora.

Problema 5.
En el triángulo *ABC* sean *A´*, *B´*, *C´* puntos en los lados *BC*, *CA*, *AB* respectivamente de modo que $\frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{C'B}$. La recta paralela a *B´C´* que pasa por *A´* corta a la recta *AC* en *P* y a la recta *AB* en *Q*. Demostrar que $\frac{PQ}{B'C'} \geq 2$.

Problema 6.
Un triángulo equilátero de lado de longitud entera *n*, con $n \geq 1$, se subdivide en triangulitos de lado 1, mediante paralelas a sus lados, como se muestra en la figura para $n = 4$.



Consideramos el conjunto *A* de todos los puntos que son vértices de algún triangulito de lado 1. Llamamos *subtriángulo* a todo triángulo equilátero con sus 3 vértices en el conjunto *A* y sus 3 lados contenidos en líneas de la subdivisión inicial.
Se quiere colorear todos los puntos de *A* de rojo o de azul de modo que ningún subtriángulo tenga los tres vértices de un mismo color. Si *C*(*n*) es la cantidad de coloraciones que satisfacen esta condición, calcular *C*(*n*) para cada $n \geq 1$.