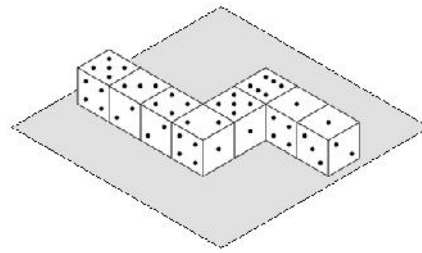
XXVI^a OLIMPÍADA de MAYO
Primer Nivel
Octubre de 2020

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
<u>Justifica cada una de tus respuestas.</u>
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 7 de noviembre.

PROBLEMA 1

Sofía ubica los dados sobre una mesa como se muestra en la figura, juntando caras que tienen el mismo número en cada dado. Ella da vueltas alrededor de la mesa sin tocar los dados. ¿Cuál es la suma de los números de todas las caras que no puede ver?
Nota. En todo dado los números de las caras opuestas suman 7.



PROBLEMA 2

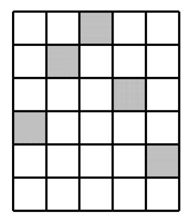
Pablo escribió la lista de todos los números de cuatro cifras tales que el dígito de las centenas es 5 y el dígito de las decenas es 7. Por ejemplo, 1**57**3 y 7**57**0 están en la lista de Pablo, pero 2754 y 571 no.
Calcular la suma de todos los números de la lista de Pablo.
Nota. Los números de la lista de Pablo no pueden empezar con cero.

PROBLEMA 3

Una hormiga despistada hace el siguiente recorrido: comenzando en el punto *A* va 1 cm al norte, después 2 cm al este, a continuación 3 cm al sur, luego 4 cm al oeste, de inmediato 5 cm al norte, continúa 6 cm al este, y así sucesivamente, finalmente 41 cm al norte y termina en el punto *B*. Calcular la distancia entre *A* y *B* (en línea recta).

PROBLEMA 4

María tiene un tablero de 6×5 con algunas casillas sombreadas, como en la figura. Ella escribe, en algún orden, los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 en la primera fila y luego completa el tablero de la siguiente manera: mira el número escrito en la casilla sombreada y escribe el número que ocupa la posición indicada por la casilla sombreada como último número de la fila siguiente, y repite los demás números en las primeras cuatro casillas, siguiendo el mismo orden que tenían en la fila anterior.



Por ejemplo, si escribió 2 3 4 1 5 en la primera fila, entonces como en la casilla sombreada está el 4, el número que ocupa el cuarto lugar (el 1) lo escribe en la última casilla de la segunda fila y la completa con los restantes números en el orden en que estaban. Queda: 2 3 4 5 1.
Luego, para completar la tercera fila, como en la casilla sombreada está el 3, el número ubicado en el tercer lugar (el 4) lo escribe en la última casilla y obtiene 2 3 5 1 4.
Siguiendo de la misma manera obtiene el tablero de la figura.

2	3	4	1	5
2	3	4	5	1
2	3	5	1	4
3	5	1	4	2
3	5	4	2	1
5	4	2	1	3

Mostrar una manera de ubicar los números en la primera fila para obtener en la última fila los números 2 4 5 1 3.

PROBLEMA 5

Sobre una mesa hay varias cartas, algunas boca arriba y otras boca abajo. La operación permitida es elegir 4 cartas y darlas vuelta. El objetivo es obtener todas las cartas en el mismo estado (todas boca arriba o todas boca abajo). Determinar si es posible lograr el objetivo mediante una secuencia de operaciones permitidas si inicialmente hay:

a) 101 cartas boca arriba y 102 boca abajo;
b) 101 cartas boca arriba y 101 boca abajo.

XXVI^{a} OLIMPÍADA de MAYO
Segundo Nivel
Octubre de 2020

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 7 de noviembre.

PROBLEMA 1
Decimos que un número entero positivo es *súper-impar* si todos sus dígitos son impares. Por ejemplo, 1737 es súper-impar y 3051 no lo es. Hallar un entero positivo par que **no** se pueda expresar como suma de dos números súper-impares y explicar por qué no es posible expresarlo de esa manera.

PROBLEMA 2
a) Determinar si existen enteros positivos a, b y c, no necesariamente distintos, tales que
$$a+b+c=2020 \text{ y } 2^a+2^b+2^c \text{ es un cuadrado perfecto.}$$
b) Determinar si existen enteros positivos a, b y c, no necesariamente distintos, tales que
$$a+b+c=2020 \text{ y } 3^a+3^b+3^c \text{ es un cuadrado perfecto.}$$

PROBLEMA 3
Se tiene una caja con 2020 piedras. Ana y Beto juegan a retirar piedras de la caja, alternadamente y comenzando por Ana. Cada jugador en su turno debe retirar un número positivo de piedras que sea capicúa. El que logre dejar la caja vacía gana. Determinar cuál de los dos tiene una estrategia ganadora, y explicar cuál es esa estrategia.
Nota. Un entero positivo es capicúa si se lee igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha. Por ejemplo 3, 22, 484 y 2002 son capicúas.

PROBLEMA 4
Sean ABC un triángulo rectángulo, recto en B, y M el punto medio del lado BC. Sea P el punto en la bisectriz del ángulo $B\hat{A}C$ tal que PM es perpendicular a BC (P está fuera del triángulo ABC). Determinar el área del triángulo ABC si $PM = 1$ y $MC = 5$.

PROBLEMA 5
Decimos que un entero positivo n es *circular* si es posible colocar los números 1, 2, …, n alrededor de una circunferencia de tal manera que no haya tres números adyacentes cuya suma sea múltiplo de 3.
a) Demostrar que 9 no es circular.
b) Demostrar que todo entero mayor que 9 es circular.