martes, 16 de julio 2024

Problema 1. Determinar todos los números reales α tales que, para cada entero positivo n, el entero

$$\lfloor\alpha\rfloor + \lfloor 2\alpha\rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha\rfloor$$

es un múltiplo de n. (Nota: la parte entera $\lfloor z\rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual a z. Por ejemplo, $\lfloor -\pi\rfloor = -4$ y $\lfloor 2\rfloor = \lfloor 2{,}9\rfloor = 2$.)

Problema 2. Determinar todas las parejas (a, b) de enteros positivos para las que existen enteros positivos g y N tales que

$$\operatorname{mcd}(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

se cumple para todo $n \geqslant N$. (Nota: $\operatorname{mcd}(x, y)$ denota el máximo común divisor de x e y.)

Problema 3. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión infinita de enteros positivos, y sea N un entero positivo. Supongamos que, para cada $n > N$, a_n es igual al número de veces que aparece el valor a_{n-1} en la lista $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Demostrar que al menos una de las sucesiones $a_1, a_3, a_5, \ldots$ y $a_2, a_4, a_6, \ldots$ es eventualmente periódica.

(Una sucesión infinita $b_1, b_2, b_3, \ldots$ es *eventualmente periódica* si existen enteros positivos p y M tales que $b_{m+p} = b_m$ para todo $m \geqslant M$.)

Tiempo: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema vale 7 puntos.

miércoles, 17. julio 2024

Problema 4. Sea ABC un triángulo con $AB < AC < BC$. Sean I y ω el incentro y el incírculo del triángulo ABC, respectivamente. Sea X el punto de la recta BC, diferente de C, tal que la recta paralela a AC que pasa por X es tangente a ω. Análogamente, sea Y el punto de la recta BC, diferente de B, tal que la recta paralela a AB que pasa por Y es tangente a ω. La recta AI corta de nuevo al circuncírculo del triángulo ABC en $P \neq A$. Sean K y L los puntos medios de AC y AB, respectivamente. Demostrar que $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

Problema 5. El caracol Turbo juega un juego en un tablero con 2024 filas y 2023 columnas. En 2022 de las casillas del tablero se han escondido monstruos. Inicialmente, Turbo no sabe donde está ninguno de los monstruos, pero sabe que hay exactamente un monstruo en cada fila excepto en la primera y en la última fila, y que cada columna contiene a lo más un monstruo.

Turbo hace una serie de intentos para ir de la primera a la última fila. En cada intento, elige empezar en cualquier casilla de la primera fila y a continuación repetidamente se mueve a una casilla vecina con la que comparta un lado. (Le está permitido regresar a una casilla visitada previamente.) Si llega a una casilla con un monstruo, su intento termina y es transportado de vuelta a la primera fila para comenzar un nuevo intento. Los monstruos no se mueven, y Turbo recuerda si en cada casilla visitada hay o no hay un monstruo. Si llega a una casilla de la última fila, su intento termina y el juego finaliza.

Determinar el menor valor de n para el cual Turbo tiene una estrategia que le garantiza llegar a la última fila en el n-ésimo intento o antes, independientemente de la ubicación de los monstruos.

Problema 6. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales. Una función $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ se llama *acuaesuliana* si se satisface la siguiente propiedad: para cada $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{o} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Demostrar que existe un entero c tal que para toda función acuaesuliana f hay a lo más c números racionales distintos de la forma $f(r) + f(-r)$ para algún número racional r, y encontrar el menor valor posible de c.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema vale 7 puntos.