sábado 8 de julio de 2023

Problema 1. Determina todos los enteros compuestos $n > 1$ que satisfacen la siguiente propiedad: si $d_1, d_2, \ldots, d_k$ son todos los divisores positivos de n con $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, entonces d_i divide a $d_{i+1} + d_{i+2}$ para cada $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Problema 2. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB < AC$. Sea Ω el circuncírculo de ABC. Sea S el punto medio del arco CB de Ω que contiene a A. La perpendicular por A a BC corta al segmento BS en D y a Ω de nuevo en $E \neq A$. La paralela a BC por D corta a la recta BE en L. Sea ω el circuncírculo del triángulo BDL. Las circunferencias ω y Ω se cortan de nuevo en $P \neq B$. Demuestra que la recta tangente a ω en P corta a la recta BS en un punto de la bisectriz interior del ángulo $\angle BAC$.

Problema 3. Para cada entero $k \geqslant 2$, determina todas las sucesiones infinitas de enteros positivos $a_1, a_2, \ldots$ para las cuales existe un polinomio P de la forma $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, con $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ enteros no negativos, tal que

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

para todo entero $n \geqslant 1$.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema vale 7 puntos.

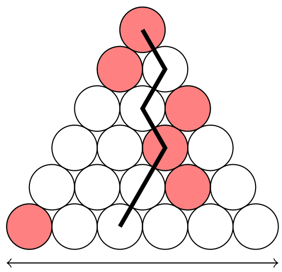
domingo 9 de julio de 2023

Problema 4. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ números reales positivos, todos distintos entre sí, tales que

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

es entero para todo $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Demuestra que $a_{2023} \geqslant 3034$.

Problema 5. Sea n un entero positivo. Un *triángulo japonés* consiste en $1 + 2 + \cdots + n$ círculos iguales acomodados en forma de triángulo equilátero de modo que para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, la fila número i contiene i círculos, de los cuales exactamente uno de ellos se pinta de rojo. Un *camino ninja* en un triángulo japonés es una sucesión de n círculos que comienza con el círculo de la fila superior y termina en la fila inferior, pasando sucesivamente de un círculo a uno de los dos círculos inmediatamente debajo de él. En el siguiente dibujo se muestra un ejemplo de un triángulo japonés con $n = 6$, junto con un camino ninja en ese triángulo que contiene dos círculos rojos.



En términos de n, determina el mayor k tal que cada triángulo japonés tiene un camino ninja que contiene al menos k círculos rojos.

Problema 6. Sea ABC un triángulo equilátero. Sean A_1, B_1, C_1 puntos interiores de ABC tales que $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$, y

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Las rectas BC_1 y CB_1 se cortan en A_2, las rectas CA_1 y AC_1 se cortan en B_2, y las rectas AB_1 y BA_1 se cortan en C_2.
Demuestra que si el triángulo $A_1B_1C_1$ es escaleno, entonces los tres circuncírculos de los triángulos AA_1A_2, BB_1B_2 y CC_1C_2 pasan todos por dos puntos comunes.

(Nota: un triángulo escaleno es un triángulo cuyos tres lados tienen longitudes distintas.)