Lunes, 19 de julio de 2021

Problema 1. Sea $n \geqslant 100$ un entero. Iván escribe cada uno de los números $n, n+1, \ldots, 2n$ en un naipe diferente. Después de barajar estos $n+1$ naipes, los divide en dos pilas distintas. Probar que al menos una de esas pilas contiene dos naipes tales que la suma de sus números es un cuadrado perfecto.

Problema 2. Probar que la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

se satisface para cualquier elección de números reales $x_1, \ldots, x_n$.

Problema 3. Sea D un punto interior de un triángulo acutángulo ABC, con $AB > AC$, de forma que $\angle DAB = \angle CAD$. El punto E en el segmento AC satisface que $\angle ADE = \angle BCD$, el punto F en el segmento AB satisface $\angle FDA = \angle DBC$, y el punto X en la recta AC satisface $CX = BX$. Sean O_1 y O_2 los circuncentros de los triángulos ADC y EXD respectivamente. Probar que las rectas BC, EF y O_1O_2 son concurrentes.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema vale 7 puntos.

Martes, 20 de julio de 2021

Problema 4. Sean Γ una circunferencia con centro I y $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que cada uno de los segmentos AB, BC, CD y DA es tangente a Γ. Sea Ω la circunferencia circunscrita del triángulo AIC. La prolongación de BA más allá de A corta a Ω en X, y la prolongación de BC más allá de C corta a Ω en Z. Las prolongaciones de AD y CD más allá de D cortan a Ω en Y y T respectivamente. Probar que

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Problema 5. Dos ardillas, Ardi y Dilla, han recolectado 2021 nueces para el invierno. Ardi numera las nueces desde 1 hasta 2021, y excava 2021 pequeños hoyos en el suelo en una disposición circular alrededor de su árbol favorito. A la mañana siguiente, Ardi observa que Dilla ha colocado una nuez en cada hoyo, pero sin tener en cuenta la numeración. No contenta con esto, Ardi decide reordenar las nueces realizando una secuencia de 2021 movimientos. En el k-ésimo movimiento Ardi intercambia las posiciones de las dos nueces adyacentes a la nuez con el número k. Probar que existe un valor de k tal que, en el k-ésimo movimiento, las nueces intercambiadas tienen números a y b tales que $a < k < b$.

Problema 6. Sean $m \geqslant 2$ un entero, A un conjunto finito de enteros (no necesariamente positivos), y $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ subconjuntos de A. Suponemos que para cada $k = 1, 2, \ldots, m$, la suma de los elementos de B_k es m^k. Probar que A contiene al menos $m/2$ elementos.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema vale 7 puntos.