lunes, 21. septiembre 2020

Problema 1. Considere el cuadrilátero convexo $ABCD$. El punto P está en el interior de $ABCD$. Asuma las siguientes igualdades de razones:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Demuestre que las siguientes tres rectas concurren en un punto: la bisectriz interna del ángulo $\angle ADP$, la bisectriz interna del ángulo $\angle PCB$ y la mediatriz del segmento AB.

Problema 2. Los números reales a, b, c, d son tales que $a \geq b \geq c \geq d > 0$ y $a + b + c + d = 1$. Demuestre que

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Problema 3. Hay $4n$ piedritas de pesos $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Cada piedrita se colorea de uno de n colores de manera que hay cuatro piedritas de cada color. Demuestre que podemos colocar las piedritas en dos montones de tal forma que las siguientes dos condiciones se satisfacen:

- Los pesos totales de ambos montones son iguales.
- Cada montón contiene dos piedritas de cada color.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema vale 7 puntos.

martes, 22. septiembre 2020

Problema 4. Sea $n > 1$ un entero. A lo largo de la pendiente de una montaña hay n^2 estaciones, todas a diferentes altitudes. Dos compañías de teleférico, A y B, operan k teleféricos cada una. Cada teleférico realiza el servicio desde una estación a otra de mayor altitud (sin paradas intermedias). Los teleféricos de la compañía A parten de k estaciones diferentes y acaban en k estaciones diferentes; igualmente, si un teleférico parte de una estación más alta que la de otro, también acaba en una estación más alta que la del otro. La compañía B satisface las mismas condiciones. Decimos que dos estaciones están *unidas* por una compañía si uno puede comenzar por la más baja y llegar a la más alta con uno o más teleféricos de esa compañía (no se permite otro tipo de movimientos entre estaciones).

Determine el menor entero positivo k para el cual se puede garantizar que hay dos estaciones unidas por ambas compañías.

Problema 5. Se tiene una baraja de $n > 1$ cartas, con un entero positivo escrito en cada carta. La baraja tiene la propiedad de que la media aritmética de los números escritos en cada par de cartas es también la media geométrica de los números escritos en alguna colección de una o más cartas.

¿Para qué valores de n se tiene que los números escritos en las cartas son todos iguales?

Problema 6. Pruebe que existe una constante positiva c para la que se satisface la siguiente afirmación:

Sea $n > 1$ un entero y sea $\mathcal{S}$ un conjunto de n puntos del plano tal que la distancia entre cualesquiera dos puntos diferentes de $\mathcal{S}$ es al menos 1. Entonces existe una recta ℓ separando $\mathcal{S}$ tal que la distancia de cualquier punto de $\mathcal{S}$ a ℓ es al menos $cn^{-1/3}$.

(Una recta ℓ *separa* un conjunto de puntos $\mathcal{S}$ si ℓ corta a alguno de los segmentos que une dos puntos de $\mathcal{S}$.)

Nota. Los resultados más débiles que se obtienen al sustituir $cn^{-1/3}$ por $cn^{-\alpha}$ se podrán valorar dependiendo del valor de la constante $\alpha > 1/3$.

Language: Spanish

Tiempo: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema vale 7 puntos.