Martes, 16 de julio de 2019

Problema 1. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Determinar todas las funciones $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que, para todos los enteros a y b,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Problema 2. En el triángulo ABC, el punto A_1 está en el lado BC y el punto B_1 está en el lado AC. Sean P y Q puntos en los segmentos AA_1 y BB_1, respectivamente, tales que PQ es paralelo a AB. Sea P_1 un punto en la recta PB_1 distinto de B_1, con B_1 entre P y P_1, y $\angle PP_1C = \angle BAC$. Análogamente, sea Q_1 un punto en la recta QA_1 distinto de A_1, con A_1 entre Q y Q_1, y $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Demostrar que los puntos P, Q, P_1, y Q_1 son concíclicos.

Problema 3. Una red social tiene 2019 usuarios, algunos de los cuales son amigos. Siempre que el usuario A es amigo del usuario B, el usuario B también es amigo del usuario A. Eventos del siguiente tipo pueden ocurrir repetidamente, uno a la vez:

> Tres usuarios A, B, y C tales que A es amigo de B y de C, pero B y C no son amigos, cambian su estado de amistad de modo que B y C ahora son amigos, pero A ya no es amigo ni de B ni de C. Las otras relaciones de amistad no cambian.

Inicialmente, hay 1010 usuarios que tienen 1009 amigos cada uno, y hay 1009 usuarios que tienen 1010 amigos cada uno. Demostrar que hay una sucesión de este tipo de eventos después de la cual cada usuario es amigo como máximo de uno de los otros usuarios.

Language: Spanish

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos

Spanish (spa), day 2

Miércoles, 17 de julio de 2019

Problema 4. Encontrar todos los pares (k, n) de enteros positivos tales que

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Problema 5. El Banco de Bath emite monedas con una H en una cara y una T en la otra. Harry tiene n monedas de este tipo alineadas de izquierda a derecha. Él realiza repetidamente la siguiente operación: si hay exactamente $k > 0$ monedas con la H hacia arriba, Harry voltea la k-ésima moneda contando desde la izquierda; en caso contrario, todas las monedas tienen la T hacia arriba y él se detiene. Por ejemplo, si $n = 3$ y la configuración inicial es THT, el proceso sería $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, que se detiene después de tres operaciones.

(a) Demostrar que para cualquier configuración inicial que tenga Harry, el proceso se detiene después de un número finito de operaciones.

(b) Para cada configuración inicial C, sea $L(C)$ el número de operaciones que se realizan hasta que Harry se detiene. Por ejemplo, $L(THT) = 3$ y $L(TTT) = 0$. Determinar el valor promedio de $L(C)$ sobre todas las 2^n posibles configuraciones iniciales de C.

Problema 6. Sea I el incentro del triángulo acutángulo ABC con $AB \neq AC$. La circunferencia inscrita (o incírculo) ω de ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. La recta que pasa por D y es perpendicular a EF corta a ω nuevamente en R. La recta AR corta a ω nuevamente en P. Las circunferencias circunscritas (o circuncírculos) de los triángulos PCE y PBF se cortan nuevamente en Q.

Demostrar que las rectas DI y PQ se cortan en la recta que pasa por A y es perpendicular a AI.

Language: Spanish

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos