Lunes 9 de julio de 2018

Problema 1. Sea Γ la circunferencia circunscrita al triángulo acutángulo ABC. Los puntos D y E están en los segmentos AB y AC, respectivamente, y son tales que $AD = AE$. Las mediatrices de BD y CE cortan a los arcos menores AB y AC de Γ en los puntos F y G, respectivamente. Demostrar que las rectas DE y FG son paralelas (o son la misma recta).

Problema 2. Hallar todos los enteros $n \geq 3$ para los que existen números reales $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, tales que $a_{n+1} = a_1$ y $a_{n+2} = a_2$, y

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Problema 3. Un *triángulo anti-Pascal* es una disposición de números en forma de triángulo equilátero de tal manera que cada número, excepto los de la última fila, es el valor absoluto de la diferencia de los dos números que están inmediatamente debajo de él. Por ejemplo, la siguiente disposición es un triángulo anti-Pascal con cuatro filas que contiene todos los enteros desde 1 hasta 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Determinar si existe un triángulo anti-Pascal con 2018 filas que contenga todos los enteros desde 1 hasta $1 + 2 + \cdots + 2018$.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos

Martes 10 de julio de 2018

Problema 4. Un *lugar* es un punto (x, y) en el plano tal que x, y son ambos enteros positivos menores o iguales que 20.

Al comienzo, cada uno de los 400 lugares está vacío. Ana y Beto colocan piedras alternadamente, comenzando con Ana. En su turno, Ana coloca una nueva piedra roja en un lugar vacío tal que la distancia entre cualesquiera dos lugares ocupados por piedras rojas es distinto de $\sqrt{5}$. En su turno, Beto coloca una nueva piedra azul en cualquier lugar vacío. (Un lugar ocupado por una piedra azul puede estar a cualquier distancia de cualquier otro lugar ocupado.) Ellos paran cuando alguno de los dos no pueda colocar una piedra.

Hallar el mayor K tal que Ana pueda asegurarse de colocar al menos K piedras rojas, sin importar cómo Beto coloque sus piedras azules.

Problema 5. Sea $a_1, a_2, \ldots$ una sucesión infinita de enteros positivos. Supongamos que existe un entero $N > 1$ tal que para cada $n \geq N$ el número

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

es entero. Demostrar que existe un entero positivo M tal que $a_m = a_{m+1}$ para todo $m \geq M$.

Problema 6. Un cuadrilátero convexo $ABCD$ satisface $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. El punto X en el interior de $ABCD$ es tal que

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{y} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Demostrar que $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.

Language: Spanish

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos