Martes, 18 de julio de 2017

Problema 1. Para cada entero $a_0 > 1$, se define la sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tal que para cada $n \geqslant 0$:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{si } \sqrt{a_n} \text{ es entero,} \\ a_n + 3 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Determinar todos los valores de a_0 para los que existe un número A tal que $a_n = A$ para infinitos valores de n.

Problema 2. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Determinar todas las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que, para cualesquiera números reales x e y,

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

Problema 3. Un conejo invisible y un cazador juegan como sigue en el plano euclídeo. El punto de partida A_0 del conejo, y el punto de partida B_0 del cazador son el mismo. Después de $n-1$ rondas del juego, el conejo se encuentra en el punto A_{n-1} y el cazador se encuentra en el punto B_{n-1}. En la n-ésima ronda del juego, ocurren tres hechos en el siguiente orden:

(i) El conejo se mueve de forma invisible a un punto A_n tal que la distancia entre A_{n-1} y A_n es exactamente 1.

(ii) Un dispositivo de rastreo reporta un punto P_n al cazador. La única información segura que da el dispositivo al cazador es que la distancia entre P_n y A_n es menor o igual que 1.

(iii) El cazador se mueve de forma visible a un punto B_n tal que la distancia entre B_{n-1} y B_n es exactamente 1.

¿Es siempre posible que, cualquiera que sea la manera en que se mueva el conejo y cualesquiera que sean los puntos que reporte el dispositivo de rastreo, el cazador pueda escoger sus movimientos de modo que después de 10^9 rondas el cazador pueda garantizar que la distancia entre él mismo y el conejo sea menor o igual que 100?

Miércoles, 19 de julio de 2017

Problema 4. Sean R y S puntos distintos sobre la circunferencia Ω tales que RS no es un diámetro de Ω. Sea ℓ la recta tangente a Ω en R. El punto T es tal que S es el punto medio del segmento RT. El punto J se elige en el menor arco RS de Ω de manera que Γ, la circunferencia circunscrita al triángulo JST, intersecta a ℓ en dos puntos distintos. Sea A el punto común de Γ y ℓ más cercano a R. La recta AJ corta por segunda vez a Ω en K. Demostrar que la recta KT es tangente a Γ.

Problema 5. Sea $N \geqslant 2$ un entero dado. Los $N(N+1)$ jugadores de un grupo de futbolistas, todos de distinta estatura, se colocan en fila. El técnico desea quitar $N(N-1)$ jugadores de esta fila, de modo que la fila resultante formada por los $2N$ jugadores restantes satisfaga las N condiciones siguientes:

(1) Que no quede nadie ubicado entre los dos jugadores más altos.

(2) Que no quede nadie ubicado entre el tercer jugador más alto y el cuarto jugador más alto.

$\vdots$

(N) Que no quede nadie ubicado entre los dos jugadores de menor estatura.

Demostrar que esto siempre es posible.

Problema 6. Un par ordenado (x, y) de enteros es *un punto primitivo* si el máximo común divisor de x e y es 1. Dado un conjunto finito S de puntos primitivos, demostrar que existen un entero positivo n y enteros $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tales que, para cada (x, y) de S, se cumple:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$