Lunes, 11 de julio de 2016

Problema 1. El triángulo BCF es rectángulo en B. Sea A el punto de la recta CF tal que $FA = FB$ y F está entre A y C. Se elige el punto D de modo que $DA = DC$ y AC es bisectriz del ángulo $\angle DAB$. Se elige el punto E de modo que $EA = ED$ y AD es bisectriz del ángulo $\angle EAC$. Sea M el punto medio de CF. Sea X el punto tal que $AMXE$ es un paralelogramo (con $AM \parallel EX$ y $AE \parallel MX$). Demostrar que las rectas BD, FX, y ME son concurrentes.

Problema 2. Hallar todos los enteros positivos n para los que en cada casilla de un tablero $n \times n$ se puede escribir una de las letras I, M y O de manera que:

- en cada fila y en cada columna, un tercio de las casillas tiene I, un tercio tiene M y un tercio tiene O; y
- en cualquier línea diagonal compuesta por un número de casillas divisible por 3, exactamente un tercio de las casillas tienen I, un tercio tiene M y un tercio tiene O.

Nota: Las filas y las columnas del tablero $n \times n$ se numeran desde 1 hasta n , en su orden natural. Así, cada casilla corresponde a un par de enteros positivos (i, j) con $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Para $n > 1$, el tablero tiene $4n - 2$ *líneas diagonales* de dos tipos. Una línea diagonal del primer tipo se compone de todas las casillas (i, j) para las que $i + j$ es una constante, mientras que una línea diagonal del segundo tipo se compone de todas las casillas (i, j) para las que $i - j$ es una constante.

Problema 3. Sea $P = A_1A_2 \ldots A_k$ un polígono convexo en el plano. Los vértices A_1, A_2, $\ldots$, A_k tienen coordenadas enteras y se encuentran sobre una circunferencia. Sea S el área de P. Sea n un entero positivo impar tal que los cuadrados de las longitudes de los lados de P son todos números enteros divisibles por n. Demostrar que $2S$ es un entero divisible por n.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos

Martes, 12 de julio de 2016

Problema 4. Un conjunto de números enteros positivos se llama *fragante* si contiene al menos dos elementos, y cada uno de sus elementos tiene algún factor primo en común con al menos uno de los elementos restantes. Sea $P(n) = n^2 + n + 1$. Determinar el menor número entero positivo b para el cual existe algún número entero no negativo a tal que el conjunto

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

es fragante.

Problema 5. En la pizarra está escrita la ecuación

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

que tiene 2016 factores lineales en cada lado. Determinar el menor valor posible de k para el cual pueden borrarse exactamente k de estos 4032 factores lineales, de modo que al menos quede un factor en cada lado y la ecuación que resulte no tenga soluciones reales.

Problema 6. Se tienen $n \geqslant 2$ segmentos en el plano tales que cada par de segmentos se intersecan en un punto interior a ambos, y no hay tres segmentos que tengan un punto en común. Mafalda debe elegir uno de los extremos de cada segmento y colocar sobre él una rana mirando hacia el otro extremo. Luego silbará $n-1$ veces. En cada silbido, cada rana saltará inmediatamente hacia adelante hasta el siguiente punto de intersección sobre su segmento. Las ranas nunca cambian las direcciones de sus saltos. Mafalda quiere colocar las ranas de tal forma que nunca dos de ellas ocupen al mismo tiempo el mismo punto de intersección.

(a) Demostrar que si n es impar, Mafalda siempre puede lograr su objetivo.

(b) Demostrar que si n es par, Mafalda nunca logrará su objetivo.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos