Martes 8 de julio de 2014

Problema 1. Sea $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ una sucesión infinita de números enteros positivos. Demostrar que existe un único entero $n \geq 1$ tal que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Problema 2. Sea $n \geq 2$ un entero. Consideremos un tablero de tamaño $n \times n$ formado por n^2 cuadrados unitarios. Una configuración de n fichas en este tablero se dice que es *pacífica* si en cada fila y en cada columna hay exactamente una ficha. Hallar el mayor entero positivo k tal que, para cada configuración pacífica de n fichas, existe un cuadrado de tamaño $k \times k$ sin fichas en sus k^2 cuadrados unitarios.

Problema 3. En el cuadrilátero convexo $ABCD$, se tiene $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. La perpendicular a BD desde A corta a BD en el punto H. Los puntos S y T están en los lados AB y AD, respectivamente, y son tales que H está dentro del triángulo SCT y

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°\,.$$

Demostrar que la recta BD es tangente a la circunferencia circunscrita del triángulo TSH.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos

Miércoles 9 de julio de 2014

Problema 4. Los puntos P y Q están en el lado BC del triángulo acutángulo ABC de modo que $\angle PAB = \angle BCA$ y $\angle CAQ = \angle ABC$. Los puntos M y N están en las rectas AP y AQ, respectivamente, de modo que P es el punto medio de AM, y Q es el punto medio de AN. Demostrar que las rectas BM y CN se cortan en la circunferencia circunscrita del triángulo ABC.

Problema 5. Para cada entero positivo n, el Banco de Ciudad del Cabo produce monedas de valor $\frac{1}{n}$. Dada una colección finita de tales monedas (no necesariamente de distintos valores) cuyo valor total no supera $99 + \frac{1}{2}$, demostrar que es posible separar esta colección en 100 o menos montones, de modo que el valor total de cada montón sea como máximo 1.

Problema 6. Un conjunto de rectas en el plano está en *posición general* si no hay dos que sean paralelas ni tres que pasen por el mismo punto. Un conjunto de rectas en posición general separa el plano en regiones, algunas de las cuales tienen área finita; a estas las llamamos sus *regiones finitas*. Demostrar que para cada n suficientemente grande, en cualquier conjunto de n rectas en posición general es posible colorear de azul al menos $\sqrt{n}$ de ellas de tal manera que ninguna de sus regiones finitas tenga todos los lados de su frontera azules.

Nota: A las soluciones que reemplacen $\sqrt{n}$ por $c\sqrt{n}$ se les otorgarán puntos dependiendo del valor de c.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos