53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Spanish**

Day: **1**

Martes, 10 de julio de 2012

Problema 1. Dado un triángulo ABC, el punto J es el centro del excírculo opuesto al vértice A. Este excírculo es tangente al lado BC en M, y a las rectas AB y AC en K y L, respectivamente. Las rectas LM y BJ se cortan en F, y las rectas KM y CJ se cortan en G. Sea S el punto de intersección de las rectas AF y BC, y sea T el punto de intersección de las rectas AG y BC.

Demostrar que M es el punto medio de ST.

(El *excírculo* de ABC opuesto al vértice A es la circunferencia que es tangente al segmento BC, a la prolongación del lado AB más allá de B, y a la prolongación del lado AC más allá de C.)

Problema 2. Sea $n \geq 3$ un entero, y sean $a_2, a_3, \ldots, a_n$ números reales positivos tales que $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Demostrar que

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n \ > \ n^n.$$

Problema 3. El *juego de la adivinanza del mentiroso* es un juego para dos jugadores A y B. Las reglas del juego dependen de dos enteros positivos k y n conocidos por ambos jugadores.

Al principio del juego, el jugador A elige enteros x y N con $1 \leq x \leq N$. El jugador A mantiene x en secreto, y le dice a B el verdadero valor de N. A continuación, el jugador B intenta obtener información acerca de x formulando preguntas a A de la siguiente manera: en cada pregunta, B especifica un conjunto arbitrario S de enteros positivos (que puede ser uno de los especificados en alguna pregunta anterior), y pregunta a A si x pertenece a S. El jugador B puede hacer tantas preguntas de ese tipo como desee. Después de cada pregunta, el jugador A debe responderla inmediatamente con *sí* o *no*, pero puede mentir tantas veces como quiera. La única restricción es que entre cualesquiera $k+1$ respuestas consecutivas, al menos una debe ser verdadera.

Cuando B haya formulado tantas preguntas como haya deseado, debe especificar un conjunto X de a lo más n enteros positivos. Si x pertenece a X entonces gana B; en caso contrario, pierde. Demostrar que:

1. Si $n \geq 2^k$, entonces B puede asegurarse la victoria.

2. Para todo k suficientemente grande, existe un entero $n \geq 1,99^k$ tal que B no puede asegurarse la victoria.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos

Miércoles, 11 de julio de 2012

Problema 4. Hallar todas las funciones $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que cumplen la siguiente igualdad:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a),$$

para todos los enteros a, b, c que satisfacen $a + b + c = 0$.

($\mathbb{Z}$ denota el conjunto de los números enteros.)

Problema 5. Sea ABC un triángulo tal que $\angle BCA = 90°$, y sea D el pie de la altura desde C. Sea X un punto interior del segmento CD. Sea K el punto en el segmento AX tal que $BK = BC$. Análogamente, sea L el punto en el segmento BX tal que $AL = AC$. Sea M el punto de intersección de AL y BK.

Demostrar que $MK = ML$.

Problema 6. Hallar todos los enteros positivos n para los cuales existen enteros no negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos