Lunes, 18 de julio de 2011

Problema 1. Para cualquier conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de cuatro enteros positivos distintos se denota la suma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ por s_A. Sea n_A el número de parejas (i, j) con $1 \leq i < j \leq 4$ para las cuales $a_i + a_j$ divide a s_A. Encontrar todos los conjuntos A de cuatro enteros positivos distintos para los cuales se alcanza el mayor valor posible de n_A.

Problema 2. Sea $\mathcal{S}$ un conjunto finito de dos o más puntos del plano. En $\mathcal{S}$ no hay tres puntos colineales. Un *remolino* es un proceso que empieza con una recta ℓ que pasa por un único punto P de $\mathcal{S}$. Se rota ℓ en el sentido de las manecillas del reloj con centro en P hasta que la recta encuentre por primera vez otro punto de $\mathcal{S}$ al cual llamaremos Q. Con Q como nuevo centro se sigue rotando la recta en el sentido de las manecillas del reloj hasta que la recta encuentre otro punto de $\mathcal{S}$. Este proceso continúa indefinidamente.
Demostrar que se puede elegir un punto P de $\mathcal{S}$ y una recta ℓ que pasa por P tales que el remolino que resulta usa cada punto de $\mathcal{S}$ como centro de rotación un número infinito de veces.

Problema 3. Sea f una función del conjunto de los números reales en si mismo que satisface

$$f(x + y) \leq y f(x) + f(f(x))$$

para todo par de números reales x, y. Demostrar que $f(x) = 0$ para todo $x \leq 0$.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos

Martes, 19 de julio de 2011

Problema 4. Sea $n > 0$ un entero. Se dispone de una balanza de dos platillos y de n pesas cuyos pesos son $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Debemos colocar cada una de las n pesas en la balanza, una tras otra, de manera tal que el platillo de la derecha nunca sea más pesado que el platillo de la izquierda. En cada paso, elegimos una de las pesas que no ha sido colocada en la balanza, y la colocamos ya sea en el platillo de la izquierda o en el platillo de la derecha, hasta que todas las pesas hayan sido colocadas. Determinar el número de formas en las que esto se puede hacer.

Problema 5. Sea f una función del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros positivos. Se supone que para cualesquiera dos enteros m y n, la diferencia $f(m) - f(n)$ es divisible por $f(m-n)$. Demostrar que para todos los enteros m y n con $f(m) \leq f(n)$, el número $f(n)$ es divisible por $f(m)$.

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo cuya circunferencia circunscrita es Γ. Sea ℓ una recta tangente a Γ, y sean ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c las rectas que se obtienen al reflejar ℓ con respecto a las rectas BC, CA y AB, respectivamente. Demostrar que la circunferencia circunscrita del triángulo determinado por las rectas ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c es tangente a la circunferencia Γ.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos