Language: **Spanish**

Day: **1**

Miércoles 7 de julio de 2010

Problema 1. Determine todas las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f\big(\lfloor x \rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y) \big\rfloor$$

para todos los números $x, y \in \mathbb{R}$. ($\lfloor z \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que z.)

Problema 2. Sea ABC un triángulo, I su incentro y Γ su circunferencia circunscrita. La recta AI corta de nuevo a Γ en D. Sean E un punto en el arco $\widehat{BDC}$ y F un punto en el lado BC tales que

$$\angle BAF = \angle CAE < \tfrac{1}{2}\angle BAC.$$

Sea G el punto medio del segmento IF. Demuestre que las rectas DG y EI se cortan sobre Γ.

Problema 3. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros positivos. Determine todas las funciones $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

es un cuadrado perfecto para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Jueves 8 de julio de 2010

Problema 4. Sea Γ la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y P un punto en el interior del triángulo. Las rectas AP, BP y CP cortan de nuevo a Γ en los puntos K, L y M, respectivamente. La recta tangente a Γ en C corta a la recta AB en S. Si se tiene que $SC = SP$, demuestre que $MK = ML$.

Problema 5. En cada una de las seis cajas $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ hay inicialmente sólo una moneda. Se permiten dos tipos de operaciones:

Tipo 1: Elegir una caja no vacía B_j, con $1 \leq j \leq 5$. Retirar una moneda de B_j y añadir dos monedas a B_{j+1}.

Tipo 2: Elegir una caja no vacía B_k, con $1 \leq k \leq 4$. Retirar una moneda de B_k e intercambiar los contenidos de las cajas (posiblemente vacías) B_{k+1} y B_{k+2}.

Determine si existe una sucesión finita de estas operaciones que deja a las cajas B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 vacías y a la caja B_6 con exactamente $2010^{2010^{2010}}$ monedas. (Observe que $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Problema 6. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión de números reales positivos. Se tiene que para algún entero positivo s,

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \text{ tal que } 1 \leq k \leq n-1\}$$

para todo $n > s$. Demuestre que existen enteros positivos ℓ y N, con $\ell \leq s$, tales que $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ para todo $n \geq N$.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos