Language: **Spanish**

Day: **1**

Miércoles 15 de julio de 2009

Problema 1. Sea n un entero positivo y sean $a_1, \ldots, a_k$ ($k \geq 2$) enteros distintos del conjunto $\{1, \ldots, n\}$, tales que n divide a $a_i(a_{i+1} - 1)$, para $i = 1, \ldots, k-1$. Demostrar que n no divide a $a_k(a_1 - 1)$.

Problema 2. Sea ABC un triángulo con circuncentro O. Sean P y Q puntos interiores de los lados CA y AB, respectivamente. Sean K, L y M los puntos medios de los segmentos BP, CQ y PQ, respectivamente, y Γ la circunferencia que pasa por K, L y M. Se sabe que la recta PQ es tangente a la circunferencia Γ. Demostrar que $OP = OQ$.

Problema 3. Sea $s_1, s_2, s_3, \ldots$ una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos tal que las subsucesiones

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{y} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

son ambas progresiones aritméticas. Demostrar que la sucesión $s_1, s_2, s_3, \ldots$ es también una progresión aritmética.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos

Jueves 16 de julio de 2009

Problema 4. Sea ABC un triángulo con $AB = AC$. Las bisectrices de los ángulos $\angle CAB$ y $\angle ABC$ cortan a los lados BC y CA en D y E, respectivamente. Sea K el incentro del triángulo ADC. Supongamos que el ángulo $\angle BEK = 45°$. Determinar todos los posibles valores de $\angle CAB$.

Problema 5. Determinar todas las funciones f del conjunto de los enteros positivos en el conjunto de los enteros positivos tales que, para todos los enteros positivos a y b, existe un triángulo no degenerado cuyos lados miden

$$a, \; f(b) \; \text{ y } \; f(b + f(a) - 1).$$

(Un triángulo es *no degenerado* si sus vértices no están alineados).

Problema 6. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros positivos distintos y M un conjunto de $n - 1$ enteros positivos que no contiene al número $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Un saltamontes se dispone a saltar a lo largo de la recta real. Empieza en el punto 0 y da n saltos hacia la derecha de longitudes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, en algún orden. Demostrar que el saltamontes puede organizar los saltos de manera que nunca caiga en un punto de M.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos