49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Miércoles 16 de julio de 2008

Problema 1. Un triángulo acutángulo ABC tiene ortocentro H. La circunferencia con centro en el punto medio de BC que pasa por H corta a la recta BC en A_1 y A_2. La circunferencia con centro en el punto medio de CA que pasa por H corta a la recta CA en B_1 y B_2. La circunferencia con centro en el punto medio de AB que pasa por H corta a la recta AB en C_1 y C_2. Demostrar que A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 están sobre una misma circunferencia.

Problema 2. (a) Demostrar que

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1 \qquad (*)$$

para todos los números reales x, y, z, distintos de 1, con $xyz=1$.

(b) Demostrar que existen infinitas ternas de números racionales x, y, z, distintos de 1, con $xyz=1$ para los cuales la expresión $(*)$ es una igualdad.

Problema 3. Demostrar que existen infinitos números enteros positivos n tales que n^2+1 tiene un divisor primo mayor que $2n+\sqrt{2n}$.

Tiempo : 4 horas y 30 minutos
Cada Problema vale 7 puntos

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Jueves 17 de julio de 2008

Problema 4. Hallar todas las funciones $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ (es decir, las funciones f de los números reales positivos en los números reales positivos) tales que

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

para todos los números reales positivos w, x, y, z, que satisfacen $wx = yz$.

Problema 5. Sean n y k enteros positivos tales que $k \geq n$ y $k - n$ es par. Se tienen $2n$ lámparas numeradas 1, 2, ..., $2n$, cada una de las cuales puede estar encendida o apagada. Inicialmente todas las lámparas están apagadas. Se consideran sucesiones de *pasos*: en cada paso se selecciona exactamente una lámpara y se cambia su estado (si está apagada se enciende, si está encendida se apaga).

Sea N el número de sucesiones de k pasos al cabo de los cuales las lámparas 1,2, ..., n quedan todas encendidas, y las lámparas $n + 1$, ..., $2n$ quedan todas apagadas.

Sea M el número de sucesiones de k pasos al cabo de los cuales las lámparas 1,2, ..., n quedan todas encendidas, y las lámparas $n + 1$, ..., $2n$ quedan todas apagadas sin haber sido nunca encendidas.

Calcular la razón N/M.

Problema 6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que las longitudes de los lados BA y BC son diferentes. Sean ω_1 y ω_2 las circunferencias inscritas dentro de los triángulos ABC y ADC respectivamente. Se supone que existe una circunferencia ω tangente a la prolongación del segmento BA a continuación de A y tangente a la prolongación del segmento BC a continuación de C, la cual también es tangente a las rectas AD y CD. Demostrar que el punto de intersección de las tangentes comunes exteriores de ω_1 y ω_2 está sobre ω.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos