46^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas

Mérida, México

Primer Día

Miércoles 13 de julio de 2005

Language: Spanish

Problema 1. Se eligen seis puntos en los lados de un triángulo equilátero ABC: A_1 y A_2 en BC, B_1 y B_2 en CA, C_1 y C_2 en AB. Estos puntos son los vértices de un hexágono convexo $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ cuyos lados son todos iguales. Demuestre que las rectas A_1B_2, B_1C_2 y C_1A_2 son concurrentes.

Problema 2. Sea $a_1, a_2, \ldots$ una sucesión de enteros que tiene infinitos términos positivos e infinitos términos negativos. Supongamos que para cada entero positivo n, los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tienen n restos distintos al ser divididos entre n. Demuestre que cada entero se encuentra exactamente una vez en la sucesión.

Problema 3. Sean x, y, z números reales positivos tales que $xyz \geq 1$. Demuestre que

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

Problema 4. Consideremos la sucesión infinita $a_1, a_2, \ldots$ definida por

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Determine todos los enteros positivos que son primos relativos (coprimos) con todos los términos de la sucesión.

Problema 5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo que tiene los lados BC y AD iguales y no paralelos. Sean E y F puntos en los lados BC y AD, respectivamente, que satisfacen $BE = DF$. Las rectas AC y BD se cortan en P, las rectas BD y EF se cortan en Q, las rectas EF y AC se cortan en R. Consideremos todos los triángulos PQR que se forman cuando E y F varían. Demuestre que las circunferencias circunscritas a esos triángulos tienen en común otro punto además de P.

Problema 6. En una competencia de matemáticas se propusieron 6 problemas a los estudiantes. Cada par de problemas fue resuelto por más de $\frac{2}{5}$ de los estudiantes. Nadie resolvió los 6 problemas. Demuestre que hay al menos 2 estudiantes tales que cada uno tiene exactamente 5 problemas resueltos.