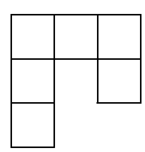
Problema 1. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$. La circunferencia de diámetro BC corta a los lados AB y AC en M y N, respectivamente. Sea O el punto medio de BC. Las bisectrices de los ángulos $\angle BAC$ y $\angle MON$ se cortan en R. Demostrar que las circunferencias circunscritas de los triángulos BMR y CNR tienen un punto común que pertenece al lado BC.

Problema 2. Encontrar todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales que satisfacen la igualdad

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

para todos los números reales a,b,c tales que $ab+bc+ca=0$.

Problema 3. Un *gancho* es una figura formada por seis cuadrados unitarios como se muestra en el diagrama



o cualquiera de las figuras que se obtienen de ésta rotándola o reflejándola. Determinar todos los rectángulos $m \times n$ que pueden cubrirse con ganchos de modo que

- el rectángulo se cubre sin huecos y sin superposiciones;
- ninguna parte de ningún gancho sobresale del rectángulo.

Problema 4. Sea $n \geq 3$ un entero. Sean $t_1, t_2, \ldots, t_n$ números reales positivos tales que

$$n^2+1>(t_1+t_2+\cdots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right).$$

Demostrar que t_i, t_j, t_k son las medidas de los lados de un triángulo para todos los i, j, k con $1\le i<j<k\le n$.

Problema 5. En un cuadrilátero convexo $ABCD$ la diagonal BD no es la bisectriz ni del ángulo ABC ni del ángulo CDA. Un punto P en el interior de $ABCD$ verifica

$$\angle PBC=\angle DBA \text{ y } \angle PDC=\angle BDA.$$

Demostrar que los vértices del cuadrilátero $ABCD$ pertenecen a una misma circunferencia si y solo si $AP=CP$.

Problema 6. Un entero positivo es *alternante* si en su representación decimal en toda pareja de dígitos consecutivos uno es par y el otro es impar.

Encontrar todos los enteros positivos n tales que n tiene un múltiplo que es alternante.